



**ΠΕ3 Εγχειρίδιο:
Επιπλέον
Εξερευνήσεις**



Περιεχόμενα

Ισορροπία.....	5
Υπόβαθρο.....	5
Εκθέματα που σχετίζονται με την έννοια του βαρυκέντρου	8
Σύνδεση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα	13
Καθρέφτες και συμμετρίες.....	14
Ορισμός της θεματικής.....	14
Σύνδεση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα	17
Εκθέματα του έργου SMEM που σχετίζονται με την έννοια της Συμμετρίας.....	18
Παραδείγματα δραστηριοτήτων με τη χρήση του ίδιου υλικού	28
Συμπέρασμα	29
Η νέα περιπέτεια της Έμου με την έννοια της συμμετρίας (περιλαμβάνει εργασίες)	30
Συναρμολόγηση σχημάτων	33
Ορισμός της Συναρμολόγησης σχημάτων	33
Σύνδεση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα	35
Εκθέματα του έργου SMEM που σχετίζονται με αυτή την έννοια	36
Μερικές πιθανές συνδέσεις μεταξύ των εκθεμάτων	36
Παραδείγματα δραστηριοτήτων με τη χρήση του ίδιου υλικού	37
Συμπέρασμα	39
Παρατήρηση και καταμέτρηση	41
Οι μαθηματικές έννοιες της παρατήρησης και της καταμέτρησης για μικρά παιδιά	41
Ενσωμάτωση των Μαθηματικών Εννοιών της Παρατήρησης και της Καταμέτρησης στην Προσχολική Εκπαίδευση	43
Εκθέματα του έργου SMEM που σχετίζονται με τις έννοιες της Καταμέτρησης και της Παρατήρησης.....	44
Διαδρομές.....	54
Εκθέματα του έργου SMEM που σχετίζονται με την έννοια των Διαδρομών	54
Παράδειγμα ενός Εργαστηρίου βασισμένου στο έργο SMEM	62

Το παρόν εγχειρίδιο συντάχθηκε στα αγγλικά ως κοινή προσπάθεια όλων των εταιρών του έργου.

Διατίθεται επίσης μεταφρασμένο στα ισπανικά, τα γερμανικά, τα γαλλικά, τα σερβικά και τα ελληνικά.

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά είναι καίριας σημασίας στα μαθήματα STEAM και ζωτικής σημασίας για την καλλιέργεια του ενδιαφέροντος για την επιστήμη ανάμεσα στη νεολαία. Το έργο μας, με την ονομασία SMEM “Significant Mathematics for Early Mathematicians”, και μεταφράζεται στα ελληνικά ως «Σημαντικά Μαθηματικά για Νεαρούς Μαθηματικούς», υιοθετεί μια πολυδιάστατη προσέγγιση. Στόχος του είναι να φέρει την καινοτομία όσον αφορά τις μεθόδους διδασκαλίας των μαθηματικών, να μειώσει το χάσμα μεταξύ των φύλων στους τομείς STEM, να καλλιεργήσει ποικίλες δεξιότητες και να προωθήσει μια θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Απευθύνεται σε παιδιά ηλικίας τριών έως οκτώ ετών, σε εκπαιδευτικούς, καθώς και σε όσους επιθυμούν να συνδυάσουν το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών με το παιχνίδι. Με κεντρικό άξονα την μη τυπική εκπαίδευση, η νοοτροπία του έργου θα μπορούσε να συνοψιστεί στην εξής φράση: «Δεν διδάσκουμε τους μαθητές, αλλά αυτοί μαθαίνουν» «Μαθαίνουν καθώς καθοδηγούμε», προωθώντας έναν κύκλο πολυδιάστατης Βιωματικής (Hands-on), Γνωστικής (Minds-On) και Συναισθηματικής (Hearts-On) μαθησιακής εμπειρίας (εκπαιδευτική προσέγγιση "Hands-On, Minds-On, Hearts-On και Talk-On").

Πιστεύουμε ακράδαντα ότι τα εγχειρίδια τα οποία εστιάζουν στα εκθέματα των παραγόμενων 1 και 2 του έργου SMEM προσφέρουν διεξοδική πληροφόρηση για την υλοποίηση των προβλεπόμενων δραστηριοτήτων. Περιλαμβάνουν τους στόχους, το περιεχόμενο, τη δυναμική, τις διασυνδέσεις και πολλά άλλα στοιχεία, παρέχοντας παράλληλα μια ολιστική κατανόηση των κινήτρων που οδηγούν τους εταίρους του έργου SMEM να μοιραστούν τις εμπειρίες τους και να αναπτύξουν, με τρόπο συνεργατικό, καινοτόμες δραστηριότητες και μορφότυπα.

Καθ’ όλη τη διάρκεια της διαδικασίας, αντιμετωπίσαμε επανειλημμένα ορισμένες βασικές προκλήσεις όσον αφορά την κατάρτιση των μαθηματικών, οι οποίες συμπεριλάμβαναν θέματα από την περιπλοκότητα του περιεχομένου και της γλώσσας, έως την αλληλεπίδραση μεταξύ φυσικού ή εικονικού χειρισμού των εκθεμάτων, την επεξεργασία των διάφορων παρουσιαζόμενων εννοιών και την διέγερση των δεξιοτήτων των μαθητών. Αυτό το «ταξίδι» μας ώθησε επίσης να διερευνήσουμε το ενδεχόμενο ύπαρξης συνέργειας μεταξύ των πρακτικών και των εικονικών δραστηριοτήτων.

Έτσι, μέσω της δημιουργίας του παρόντος εγχειριδίου με την ονομασία «Επιπλέον Εξερευνήσεις», θελήσαμε να επεκτείνουμε το διάλογο που ξεκίνησε μεταξύ των εταίρων του έργου και των εκπαιδευτικών που βρήκαν την πρότασή μας αρκετά ενδιαφέρουσα ώστε αποφάσισαν να τη δοκιμάσουν με τους μαθητές τους.

Ως εκ τούτου, επιλέξαμε ορισμένες από τις κύριες θεματικές του έργου για την ανάπτυξη κειμένων τα οποία δεν έχουν ρεαλιστικό στόχο που να συνδέεται με τη χρήση των εκθεμάτων, αλλά τα οποία ελπίζουμε ότι μπορούν να οδηγήσουν σε βαθύτερο προβληματισμό και εμπλουτισμό των προτάσεών μας:

- Ισορροπία
- Καθρέφτες και συμμετρίες
- Συναρμολόγηση σχημάτων
- Παρατήρηση και καταμέτρηση
- Διαδρομές

Για τους ίδιους λόγους που μας ωθούν να εισαγάγουμε ποικίλες δραστηριότητες που καλλιεργούν μια ευχάριστη εμπειρία γεμάτη διέγερση για τους μαθητές όσον αφορά τα μαθηματικά, είμαστε

πεπεισμένοι ότι προτείνουμε μια παρόμοια ευκαιρία προς τους διδάσκοντες συναδέλφους μας ώστε να συμμετάσχουν σε ατομική εκπαιδευτική έρευνα.

Για να διατηρήσουμε αυτόν τον παραλληλισμό, όπως ακριβώς στοχεύουμε να εμπλουτίσουμε την εξελικτική δυναμική των δραστηριοτήτων που προτείνονται προς μαθητές οι οποίοι δεν αποτελούν τους τυπικούς αποδέκτες της παραδοσιακής μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία συχνά θεωρείται ότι απευθύνεται αποκλειστικά σε ισχυρά και συγκροτημένα «μυαλά», πιστεύουμε ότι οι απόψεις των εκπαιδευτικών που εργάζονται καθημερινά στα πλαίσια αυτού του κρίσιμου εκπαιδευτικού σταδίου έχουν τεράστια αξία και αναβαθμίζουν το μεγαλείο του επαγγέλματός μας.

Ισορροπία

Η ισορροπία και η ισοστάθμιση είναι θεμελιώδεις πτυχές της ανάπτυξης του εαυτού μας (όρθιος, συντονίζοντας το σώμα του), καθώς επίσης για την ανάπτυξη της αίσθησης του φυσικού κόσμου, όχι μόνο όσον αφορά τα διάφορα γεωμετρικά σχήματα αλλά και για το πώς αυτά τα σχήματα αντιδρούν στον φυσικό κόσμο, ιδίως σε συνάρτηση με τη βαρύτητα.

Κατά συνέπεια, μια σημαντική πρόκληση για τα παιδιά έγκειται στη σύνδεση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών - όπως τα γεωμετρικά σχήματα και οι αριθμητικοί μέσοι όροι - με απτά φαινόμενα, όπως η επίτευξη τέλει ισορροπίας μεταξύ αντικειμένων.

Η θεμελιώδης έννοια που σχετίζεται με την ισορροπία είναι το βαρύκεντρο. Τα εκθέματά μας παρουσιάζουν πολλαπλά πειράματα τα οποία έχουν σχεδιαστεί για να αποκαλύψουν τη συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ του μαθηματικού μέσου όρου και της φυσικής της ισορροπίας. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτά τα πειράματα, προσαρμόζοντας τον τρόπο καθοδήγησης των μαθητών τους για τη διεξαγωγή τους με βάση την ηλικία και την οικειότητα των παιδιών με τις παρουσιαζόμενες θεματικές. Τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας μπορούν να κάνουν τις δικές τους προτάσεις, δίνοντας έτσι την ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να τα κατευθύνουν καταλληλότερα και να ενισχύσουν την κατανόησή τους.

Υπόβαθρο

Το βαρύκεντρο, το οποίο ονομάζεται επίσης κέντρο μάζας ή κεντροειδές, αντιπροσωπεύει ένα γεωμετρικό σημείο που σχετίζεται με δισδιάστατα σχήματα που εκτείνονται σε τρισδιάστατα στερεά. Το βαρύκεντρο, που ονομάζεται επίσης κέντρο μάζας ή κεντροειδές, αντιπροσωπεύει ένα γεωμετρικό σημείο που σχετίζεται με δισδιάστατα σχήματα και επεκτείνεται στα τρισδιάστατα στερεά. Μπορεί να οριστεί με καθαρά γεωμετρικούς όρους, αλλά διαθέτει επίσης μια φυσική ερμηνεία που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για ν' αντιληφθούμε περί τίνος πρόκειται με τρόπο απτό.

Από γεωμετρικής άποψης, το βαρύκεντρο υποδηλώνει τη μέση θέση όλων των σημείων εντός του σχήματος, λαμβάνοντας υπόψη μόνο το είδος του σχήματός του.

Από φυσικής άποψης, το βαρύκεντρο είναι η θέση από την οποία θα παίρναμε μια συνολική ακριβή μάζα ισοδύναμη με τη μάζα του σχήματος υπό εξέταση. Για να είμαστε πιο ακριβείς, αν εφαρμόσουμε μια δύναμη σε αυτό το σημείο, το σώμα υφίσταται γραμμική επιτάχυνση χωρίς περιστροφική δύναμη. Αυτός ο ορισμός χρησιμοποιεί τη φυσική έννοια της μάζας και αναφέρεται έμμεσα σε δυνάμεις όπως η βαρύτητα.

Αυτός ο φυσικός ορισμός είναι πιθανώς αυτός με τον οποίο είμαστε πιο εξοικειωμένοι. Σχετίζεται με την ιδέα της ισορροπίας και την ισοστάθμιση. Ας υποθέσουμε ότι ένα επίπεδο σχήμα έχει φυσική μορφή (όπως ένα προφίλ κομμένο σε ένα φύλλο ξύλου). Στη συνέχεια, μπορούμε να προσπαθήσουμε να ισορροπήσουμε το αντικείμενο στο ένα μας δάχτυλο. Υπάρχει ένα μοναδικό σημείο - το βαρύκεντρο - όπου η ισορροπία είναι εφικτή. Εξ ορισμού, η βαρύτητα δρα στο σχήμα σαν να εφαρμόζεται στο βαρύκεντρο (φυσικά, στην πραγματικότητα, η βαρύτητα εφαρμόζεται σε όλα τα άτομα από τα οποία αποτελείται το σχήμα). Εάν η δύναμη στήριξης του δακτύλου μας είναι στα ίδια επίπεδα, τότε οι δύο δυνάμεις ακυρώνονται μεταξύ τους κι έτσι διατηρείται η ισορροπία του σχήματος.

Μια άλλη μέθοδος περιλαμβάνει τη συγκράτηση του αντικειμένου κάθετα στην άκρη του και τη χάραξη μιας γραμμής προς τα κάτω από το σημείο ισορροπίας, σημειώνοντας το βαρύκεντρο σε αυτή τη γραμμή. Η επανάληψη αυτής της διαδικασίας με άλλα σημεία δημιουργεί διασταυρούμενες

γραμμές που εντοπίζουν το βαρύκεντρο, καθώς η βαρύτητα το τραβάει προς τα κάτω για να το θέσει όσο το δυνατόν χαμηλότερα.

Μαθηματικά σχήματα όπως τρίγωνα, ορθογώνια ή κυβοειδή έχουν γεωμετρικά κατασκευάσιμα σημεία ισορροπίας. Για παράδειγμα, σε ένα τρίγωνο, το βαρύκεντρο βρίσκεται στη διασταύρωση των διαμέσων (θα δούμε γιατί). Αυτή η κατασκευή, ωστόσο, βασίζεται στον γεωμετρικό ορισμό.

Με δύο διακριτούς ορισμούς του βαρύκεντρου – το γεωμετρικό και το φυσικό – επιδιώκουμε να αποδείξουμε την ισοδυναμία τους μέσω ενός πειστικού επιχειρήματος ή μιας απόδειξης.

Με τον ορισμό του βαρύκεντρου ως της μέσης θέσης όλων των σημείων του σχήματος, υποστηρίζουμε ότι η τοποθέτηση ενός σχήματος στην κορυφή του βαρύκεντρου εξασφαλίζει σ' αυτό οριζόντια ισορροπία.

Για παράδειγμα, φανταστείτε κάθε σημείο στο σχήμα ως ένα μικρό σωματίδιο το οποίο διαθέτει το δικό του βάρος, παρόμοιο με μικροσκοπικές μπάλες. Κατά μέσο όρο, για κάθε τέτοιο σωματίδιο πίσω από το σημείο ισορροπίας, υπάρχει κι ένα μπροστά, κάνοντας με τον τρόπο αυτό τα ζεύγη να ισορροπήσουν από δεξιά προς τα αριστερά. Αυτά τα ζεύγη επιφέρουν μια συνολική αντιστάθμιση και δημιουργούν γενική ισορροπία.

Η βασική ιδέα του φαινομένου αυτού περιστρέφεται γύρω από την έννοια του μέσου όρου. Η βασική ιδέα είναι ότι ένας μέσος όρος χρησιμεύει ως αντιπροσωπευτική τιμή για ένα σύνολο αξιών. Αυτό ισχύει όχι μόνο για τα αριθμητικά δεδομένα, όπως τα ύψη, τα βάρη ή οι νομισματικές τιμές, αλλά και για τις τιμές που υποδηλώνουν θέση, οι οποίες σε ένα επίπεδο πλαίσιο απαιτούν τον προσδιορισμό δύο συντεταγμένων.

Μπορούμε να ξεκινήσουμε διερευνώντας τον μέσο όρο των αριθμών, που συνήθως αναφέρεται ως αριθμητικός μέσος όρος. Για δύο αριθμούς, οι οποίοι συμβολίζονται ως a και b , ο μέσος όρος, που συμβολίζεται με το γράμμα L , υπολογίζεται ως το άθροισμα a και b διά δύο, που εκφράζεται ως:

$$L = \frac{a + b}{2}$$

Αυτός ο αριθμός L έχει συγκεκριμένες ιδιότητες: απέχει εξίσου και από το a και από το b . Πιο ενδιαφέροντα, η απόσταση (με πινακίδα) L από a και b συνοψίζεται σε 0. Ως απόδειξη,

$$(L - a) + (L - b) = (a + b)/2 - a + (a + b)/2 - b = 0.$$

Φανταστείτε μια απείρου μήκους ράβδο χωρίς μάζα τοποθετημένη κατά μήκος της γραμμής των πραγματικών αριθμών, με μοναδιαίες μάζες σταθερές σε θέσεις a και b . Για να επιτευχθεί ισορροπία, πρέπει να τοποθετήσουμε το υπομόχλιο ακριβώς στο μέσο σημείο L . Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η ισορροπία της ράβδου θα παραμείνει αμετάβλητη είτε φέρει δύο διαφορετικές μοναδιαίες μάζες σε a θέσεις b , είτε μια ενιαία μάζα δύο μονάδων τοποθετημένων αποκλειστικά στο σημείο L .

Η ίδια αρχή επεκτείνεται σε τρεις αριθμούς. Ο μέσος όρος, που συμβολίζεται ως $L = (a + b + c)/3$, υποστηρίζει ότι το άθροισμα των αποστάσεών του (με το πρόσημό τους) σε αυτούς τους τρεις αριθμούς ισούται με μηδέν. Αναλογιστείτε επίσης το παράδειγμα αυτό με τους αριθμούς 2, 5, και 11, όπου ο μέσος όρος $L = (2 + 5 + 11)/3 = 6$, και οι αποστάσεις έχουν άθροισμα $(6 - 2) + (6 - 5) + (6 - 11) = 0$.

Φανταστείτε μια διαβαθμισμένη ράβδο χωρίς μάζα και με τις μοναδιαίες μάζες τοποθετημένες στα σημεία 2, 5, και 11. Για να επιτευχθεί ισορροπία, το υπομόχλιο θα ευθυγραμμιστεί με το σημάδι στην ένδειξη 6. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι το υπομόχλιο θα υποστεί την ίδια δύναμη από αυτές τις τρεις μάζες όπως και από μια ενιαία μάζα τριών μονάδων τοποθετημένων στην ένδειξη 6. Αυτή η αρχή ισχύει για οποιονδήποτε από τους πραγματικούς αριθμούς.

Στο σενάριο κατά το οποίο τα σημεία βρίσκονται στο επίπεδο, η ιδέα παραμένει παρόμοια. Δουλεύουμε με δύο συντεταγμένες για κάθε σημείο. Για ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο – ας πούμε ότι $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ – η μέση θέση αυτών των τριών σημείων είναι ένα σημείο με συντεταγμένες που είναι οι αριθμητικοί μέσοι όροι των αντίστοιχων συνιστωσών τους: $L = ((x_A + x_B + x_C)/3, (y_A + y_B + y_C)/3)$.

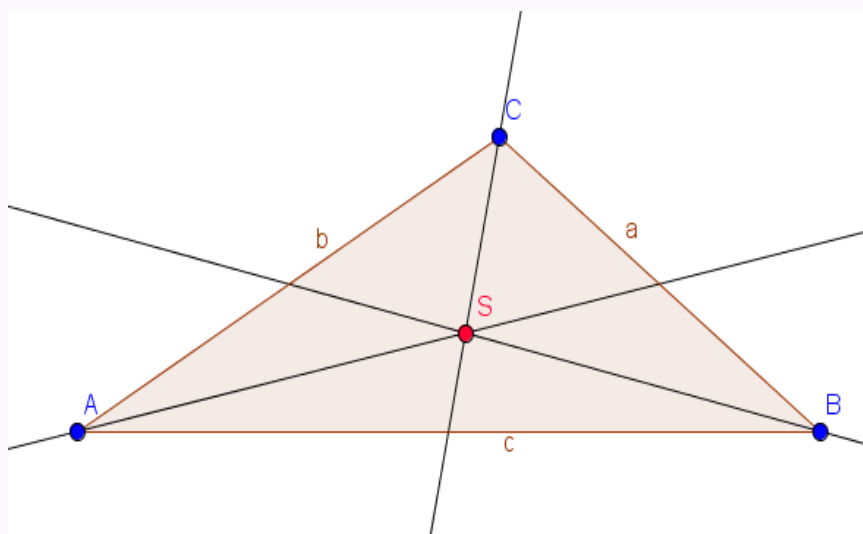
Μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο όρο των θέσεων για οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό σημείων στο επίπεδο. Στην πραγματικότητα, το εικονικό έκθεμα με την ονομασία «Βαρύκεντρο» κάνει ακριβώς αυτό, προκειμένου να βρει το σημείο ισορροπίας μιας σχεδιασμένης φιγούρας: συντάσσει μια λίστα εικονοστοιχείων που αποτελούν το σχήμα και υπολογίζει τον μέσο όρο τους x και y τις συντεταγμένες τους. Ωστόσο, από μαθηματικής άποψης, αυτό παραμένει μια προσέγγιση, δεδομένου ότι τα σχήματα αποτελούνται από σημεία, όχι εικονοστοιχεία, τα οποία είναι απείρως μικρά. Ο λογισμός προσφέρει την απειροελάχιστη απόδοση αυτής της διαδικασίας υπολογισμού του μέσου όρου, η οποία περιλαμβάνει ένα ολοκλήρωμα ως το όριο αυτού του αθροίσματος.

Σημειώνουμε ότι διάφορα σύνολα αριθμών μπορούν να αποδώσουν πανομοιότυπους μέσους όρους. Συγκεκριμένα, ο υπολογισμός των μερικών μέσων όρων επιτρέπει τη μείωση των στοιχείων στη λίστα αριθμών μας. Για παράδειγμα, ο μέσος όρος των τιμών 2, 5, και 11 ισούται με τον μέσο όρο των τιμών 2, 8, και 8, που ισούται επίσης με τον σταθμισμένο μέσο όρο των τιμών 2 και 8 με βάρη $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$. Δηλαδή,

$$(2 + 5 + 11)/3 = (2 + 8 + 8)/3 = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot x \cdot \frac{2}{3} = 6$$

Το ίδιο ισχύει και για τα σημεία του επιπέδου, όσον αφορά τις συντεταγμένες. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε δύο σημεία με ένα μόνο στο κέντρο βάρους τους (μεσαίο σημείο), υπό την προϋπόθεση ότι το σημείο αυτό διαθέτει τη συνδυασμένη μάζα των αρχικών σημείων. Αυτό θα το ονομάσουμε αρχή της υποκατάστασης: Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τμήματα ενός σχήματος με το βαρύκεντρο τους, αποδίδοντας σε αυτό το σημείο ένα βάρος που αντιστοιχεί στην αναλογική του περιοχή. Σύντομα θα ακολουθήσει μια απεικόνιση.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση προκύπτει όταν εξετάζουμε τρία σημεία στο επίπεδο: το κέντρο βάρους τριών ακριβώς ίδιων μαζών που βρίσκονται στις θέσεις A, B και Γ συμπίπτει με το κέντρο βάρους του (πλήρους) τριγώνου που σχηματίζεται από αυτές τις κορυφές. Σημειώστε ότι το τελευταίο περιλαμβάνει έναν άπειρο αριθμό σημείων, ενώ το πρώτο περιλαμβάνει μόνο τρία. Επιπλέον, αυτό το βαρύκεντρο ευθυγραμμίζεται με την τομή των τριών διαμέσων του τριγώνου, οι οποίες αποτελούν τμήματα που συνδέουν μια κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς του.



Ας το αποδείξουμε αυτό χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λαμβάνοντας υπόψη τις κορυφές Β και Γ, μπορούμε να αντικαταστήσουμε και τις δύο μάζες με μια ενιαία μάζα δύο μονάδων τοποθετημένων στο μέσο του Β και του Γ. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός συστήματος το οποίο αποτελείται από μια μάζα μίας μονάδας στο Α και μια μάζα δύο μονάδων στο $(B+C)/2$. Ο συνδυασμός αυτών των μαζών αποδίδει μια ενιαία μάζα βάρους τριών μονάδων και βρίσκεται στον σταθμισμένο μέσο όρο των δύο θέσεων, δηλαδή $1/3 A + 2/3 (B+C)/2 = (A+B+C)/3$. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει επίσης ότι το βαρύκεντρο βρίσκεται στα $2/3$ του μήκους της διαμέσου του τριγώνου. Με βάση τις αρχές της συμμετρίας, και οι τρεις διάμεσοι έχουν την ίδια ιδιότητα, και ως εκ τούτου, και οι τρεις τους θα πρέπει να τέμνονται στο βαρύκεντρο.

Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο της αντικατάστασης στο στερεό τρίγωνο, αποσυνθέτουμε την επιφάνεια του τριγώνου ABC σε τμήματα παράλληλα προς την πλευρά BC, καθένα από τα οποία μοιάζει με ράβδο με ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα. Η αντικατάσταση κάθε ράβδου με μια μάζα τοποθετημένη στο μέσο της (καθώς το βαρύκεντρο ενός τμήματος συμπίπτει με το μέσο του) συμπυκνώνει όλα τα τμήματα σε σημεία ευθυγραμμισμένα κατά μήκος της διαμέσου που διέρχεται από το σημείο Α. Κατά συνέπεια, το συνολικό βαρύκεντρο συνδυάζει όλα αυτά τα ευθυγραμμισμένα σημεία κατά μήκος της διαμέσου, επιβεβαιώνοντας την παρουσία του βαρύκεντρου σε κάποιο σημείο κατά μήκος αυτής της διαμέσου. Με βάση τις αρχές της συμμετρίας, το βαρύκεντρο βρίσκεται επίσης κατά μήκος των άλλων δύο διαμέσων, συμπίπτοντας έτσι με το σημείο τομής και των τριών διαμέσων, επιβεβαιώνοντας με τον τρόπο αυτό ότι πρόκειται για το ίδιο σημείο που εντοπίσαμε νωρίτερα.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα των τριγώνων για να καθορίσουμε μεθόδους για τον υπολογισμό του βαρυκέντρου. Αναλογιστείτε το παράδειγμα ενός πολυγωνικού σχήματος - ενός σχήματος το οποίο αποτελείται από την συναρμολόγηση ορισμένων ευθειών τμημάτων. Είναι δυνατή η διαίρεση αυτού του πολυγώνου σε επιμέρους τρίγωνα, η οποία είναι μια διαδικασία γνωστή ως «τριγωνισμός». Μπορούμε να πάρουμε για παράδειγμα έναν τριγωνισμό και να υπολογίσουμε το βαρύκεντρο και το εμβαδόν για κάθε τρίγωνο από το οποίο αποτελείται. Στη συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε το βαρύκεντρο του πολυγωνικού σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντικατάστασης. Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί αντικαθιστώντας κάθε τρίγωνο με το βαρύκεντρό του, αποδίδοντας τα σχετικά βάρη με βάση τα αντίστοιχα εμβαδά τους. Τέλος, υπολογίστε τον (πεπερασμένο!) σταθμισμένο μέσο όρο των θέσεων των τριγωνικών βαρυκεντρικών, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα εμβαδά τους είναι ταυτόχρονα επίσης τα βάρη τους.

Εκθέματα που σχετίζονται με την έννοια του βαρυκέντρου

Στο πλαίσιο του έργου SMEM, υπάρχουν τέσσερα εκθέματα τα οποία διερευνούν την έννοια του βαρυκέντρου. Θα μπορούσατε να τα συνδυάσετε για να δημιουργήσετε μια θεματική εκπαιδευτική συνεδρία για την έννοια αυτή, έχοντας την ευελιξία να τα αξιοποιήσετε είτε ταυτόχρονα είτε διαδοχικά, γεγονός που επιτρέπει στα παιδιά να εξερευνήσουν και να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ κάθε εκθέματος.

Τραμπάλα

Το έκθεμα με την ονομασία «Τραμπάλα» δείχνει μια σαφή σχέση μεταξύ των δύο βραχιόνων της τραμπάλας: ο ένας βραχίονας ανεβαίνει καθώς ο άλλος πέφτει. Αρχικά άδειο, το κέντρο βάρους βρίσκεται πάνω από την ξύλινη ράβδο. Κατά τη φόρτωση, το κέντρο βάρους μετατοπίζεται προς την πλευρά του φορτίου, προκαλώντας ανισορροπία και κλίση.

Συνήθως, η πρώτη εικόνα θα είναι ότι η ισορροπία επιτυγχάνεται με το ίδιο βάρος και στις δύο πλευρές.

Τα παιδιά παροτρύνονται να εξισορροπήσουν τη τραμπάλα, ξεκινώντας συζητήσεις σχετικά με την έννοια της ισορροπίας, τη λεπτή στιγμή που και οι δύο πλευρές της δεν είναι ούτε πλήρως ανυψωμένες, ούτε πλήρως χαμηλωμένες, αλλά βρίσκονται ισορροπημένες στη μέση. Αυτή η ασταθής ισορροπία δίνει την ευκαιρία στον/στην εκπαιδευτικό να καθοδηγήσει το παιδί προς τη διερεύνηση του τι είναι αυτό που κάνει τη συγκεκριμένη διαμόρφωση μοναδική.

Αρχικά, το παιδί μπορεί να υποθέσει ότι η ισορροπία επιτυγχάνεται όταν υπάρχουν ίσα βάρη και στις δύο πλευρές της τραμπάλας. Μέσω του πειραματισμού, ανακαλύπτουν τη σημασία της απόστασης του βάρους από το υπομόχλιο. Γίνεται προφανές ότι για να ισορροπήσει η τραμπάλα, το αντικείμενο με το μεγαλύτερο βάρος πρέπει να τοποθετηθεί πιο κοντά στη μέση, ενώ το αντικείμενο με το μικρότερο βάρος τοποθετείται σε πιο μακρινό σημείο. Μέσω της δραστηριότητας αυτής, τα παιδιά μικρότερης ηλικίας μπορούν ν' ανακαλύψουν απλές αρχές, όπως για παράδειγμα ότι «η τοποθέτηση ενός αντικειμένου κάποιου συγκεκριμένου βάρους στο διπλάσιο της απόστασης αντισταθμίζει για το μισό της μάζας του». Τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας μπορεί ακόμη και ν' ανακαλύψουν τον νόμο του μοχλού.

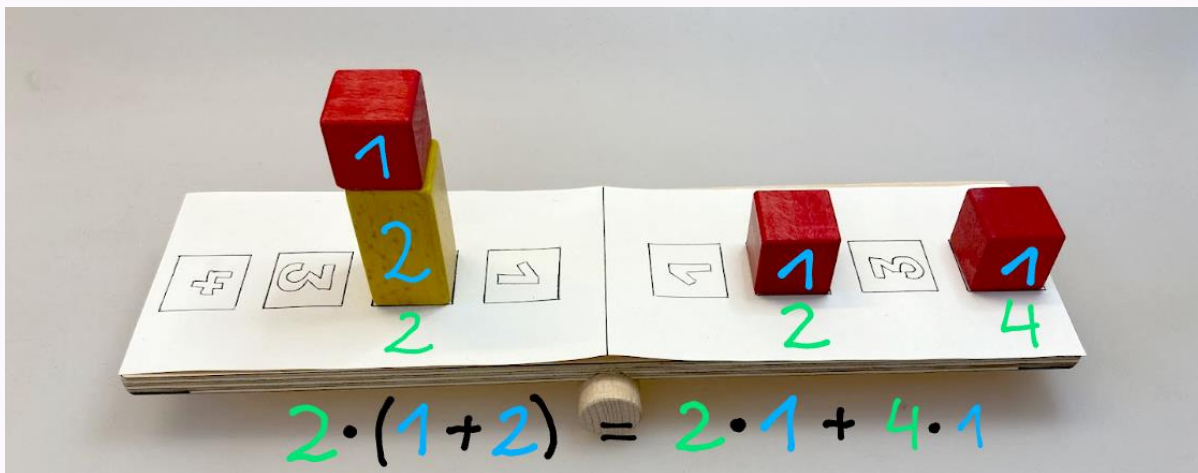
Η εισαγωγή περισσότερων από δύο βαρών στη τραμπάλα μπορεί να ενισχύσει περαιτέρω την κατανόηση των παιδιών. Η τοποθέτηση ορισμένων ενδείξεων στη τραμπάλα, οι οποίες υποδηλώνουν αρνητικές και θετικές τιμές μαζί με το μηδέν στο υπομόχλιο, βοηθά τα παιδιά ν' ανακαλύψουν το γεγονός ότι η ισορροπία επιτυγχάνεται όταν το άθροισμα των σταθμισμένων αποστάσεων (δηλαδή το άθροισμα των γινομένων των βαρών από την υπογεγραμμένη απόσταση) ισούται με μηδέν – η οποία ανακάλυψη μπορεί να επιτευχθεί με λίγη σκέψη και χρόνο.

Συμπληρωματικές Δραστηριότητες

Η πρώτη δραστηριότητα προκύπτει με τρόπο φυσικό, καθώς τα παιδιά τοποθετούν αμέσως τούβλα στον βραχίονα του μοχλού, επιδιώκοντας την επίτευξη ισορροπίας. Η πρόταση για χρήση ενός περιορισμένου αριθμού τούβλων (π.χ. τριών ή τεσσάρων) ενθαρρύνει τη διαισθητική κατανόηση των αρχών που διέπουν τη δραστηριότητα.

Όσον αφορά τη δεύτερη δραστηριότητα, διάφορα χρωματιστά τούβλα τοποθετούνται στις αντίθετες πλευρές της τραμπάλας για να επιτευχθεί ισορροπία. Καθοριστικής σημασίας είναι η τοποθέτηση διαφορετικών τούβλων σε πανομοιότυπες αριθμητικές σημάνσεις (π.χ. και οι δύο πλευρές στην ένδειξη 2). Αυτό το πείραμα επιτρέπει στα παιδιά να συνειδητοποιήσουν ότι τα τούβλα μεγαλύτερου μεγέθους είναι βαρύτερα από τα μικρότερα.

Μια τρίτη πρόκληση περιλαμβάνει την τοποθέτηση κυβοειδών στερεών σε διάφορες αριθμητικές σημάνσεις κατά μήκος των βραχιόνων του μοχλού για την επίτευξη ισορροπίας. Προσδίδοντας στο μικρότερο τουβλάκι μια τιμή μιας μονάδας και στα μεγαλύτερα τουβλάκια τιμές δύο και τεσσάρων μονάδων αντίστοιχα, θα μπορούσαμε να επιτύχουμε ισορροπία ακολουθώντας τον ακόλουθο κανόνα: Το γινόμενο του αριθμού των μονάδων και του αριθμού στον οποίο τοποθετείτε τα τουβλάκια πρέπει να είναι ίσο και στις δύο πλευρές του βραχίονα του μοχλού. Για παράδειγμα, η ισορροπία επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση του τούβλου τεσσάρων μονάδων στον αριθμό 1 και του τούβλου δύο μονάδων στον αριθμό 2.



Ψάχνοντας για ισορροπία

Στα πλαίσια του εκθέματος με την ονομασία «Ψάχνοντας για ισορροπία», τα παιδιά έχουν ως στόχο να εξισορροπήσουν τα σχήματα στην άκρη ενός τοίχου. Μετά από κάποιους πειραματισμούς, θα μπορούσαν εύκολα να επιτύχουν αυτή την ισορροπία. Ορισμένα σχήματα εμφανίζουν κεντρική συμμετρία, πράγμα που σημαίνει ότι κάθε σημείο του σχήματος ευθυγραμμίζεται διαμετρικά με ένα άλλο γύρω από ένα σταθερό κέντρο, το οποίο ισοδυναμεί με περιστροφή 180 μοιρών. Σε μια τέτοια περίπτωση, το κέντρο βάρους ευθυγραμμίζεται με το κέντρο συμμετρίας και, αν τοποθετηθεί πάνω από τον τοίχο, χωρίζει το σχήμα σε δύο ίσα μέρη (με το ίδιο εμβαδόν, το ίδιο σχήμα, περιστρεφόμενο κατά 180 μοίρες), κάνοντας έτσι το σχήμα να ισορροπήσει. Ωστόσο, η κατάσταση αυτή δεν είναι και τόσο συχνό φαινόμενο, γι' αυτό και τα παιδιά θα πρέπει να ενθαρρύνονται να πειραματίζονται με μη συμμετρικά σχήματα.

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν στη συνέχεια να προτρέψουν τα παιδιά να πραγματοποιήσουν συζητήσεις σχετικά με το τι είναι αυτό που καθιστά αυτή τη θέση μοναδική και αν είναι κατά κάποιο τρόπο ξεχωριστή. Αρχικά, τα παιδιά μπορεί να υποθέσουν ότι ένα ίσο εμβαδόν και στις δύο πλευρές του τοίχου είναι απαραίτητο για την επίτευξη ισορροπίας, η οποία είναι μια λανθασμένη υπόθεση. Στο έκθεμα με την ονομασία «Τραμπάλα», είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι δύο πλευρές της τραμπάλας δεν απαιτούσαν την τοποθέτηση αντικειμένων ίσου βάρους. Αντ' αυτού, οι προσαρμογές που έγιναν όσον αφορά την απόσταση από το υπομόχλιο είναι αυτές που είχαν πραγματική επιρροή στην εξισορρόπηση της τραμπάλας. Επιτυγχάνουμε την ισορροπία όταν και οι δύο βραχίονες έχουν την ίδια μόχλευση, η οποία καθορίζεται από το γινόμενο του βάρους του αντικειμένου και της απόστασής του από το υπομόχλιο.

Στην περίπτωση αυτή, η διαμόρφωση μοιάζει με μοχλό, με ένα μέρος του σχήματος να βρίσκεται σε κάθε πλευρά του τοίχου (υπομόχλιο). Το βάρος σε κάθε περιοχή αντιστοιχεί στο εμβαδόν του, αλλά ποια είναι τα μήκη των βραχιόνων; Η απόσταση μεταξύ του βαρυκέντρου της περιοχής (το οποίο εντοπίζεται με τη χρήση εργαλείων και εφαρμογών από τα εκθέματα με τις ονομασίες «Δημιουργώντας Ομπρέλες» ή «Βαρύκεντρο») και του τμήματος στο οποίο υπάρχει επαφή είναι αυτό που καθορίζει το μήκος του βραχίονα. Μπορούμε να επιτύχουμε ισορροπία όταν και οι δύο περιοχές έχουν την ίδια μόχλευση (το εμβαδόν τους πολλαπλασιασμένο με το μήκος του βραχίονα), ακριβώς όταν το συνολικό βαρύκεντρο στηρίζεται στο τμήμα στο οποίο υπάρχει επαφή πάνω από τον τοίχο.

Συνοπτικά, επιτυγχάνεται η ισορροπία του σχήματος *εάν και μόνο εάν* το τμήμα που αγγίζει τον τοίχο συγκρατεί το κέντρο βάρους του σχήματος. Αυτό μπορεί να αναδειχθεί μέσω ενός πειράματος: Τοποθετώντας το σχήμα σε ισορροπία στον τοίχο, εισάγετε ένα μικρό νόμισμα μεταξύ

του σχήματος και του τοίχου σε ένα τελικό σημείο του τμήματος επαφής. Το σχήμα διατηρεί την ισορροπία, αφού τώρα πλέον στηρίζεται σε δύο σημεία: το νόμισμα και το αντίθετο τελικό σημείο του τμήματος. Μετακινώντας το νόμισμα σταδιακά (με τη βοήθεια ενός χάρακα ή άλλου επίπεδου εργαλείου) προς το αντίθετο τελικό σημείο, το σχήμα ισορροπεί ακριβώς στην κορυφή του νομίσματος όταν φτάσει στο βαρύκεντρο του σχήματος. Μπορείτε να δοκιμάσετε αυτήν την ιδιότητα αξιοποιώντας ένα διαφανές σχήμα από το έκθεμα με την ονομασία «Δημιουργώντας Ομπρέλες» με τη χρήση ενός σημειωμένου κέντρου βάρους που προσδιορίστηκε προηγουμένως από την εφαρμογή.

Συμπληρωματικές Δραστηριότητες

Ως συνέχεια του εκθέματος, διατίθενται διάφορες συναρπαστικές δραστηριότητες που μπορούν να εφαρμοστούν στην τάξη. Τα παιδιά θα μπορούσαν να ψάξουν μέσα στην τάξη τους να βρουν αντικείμενα τα οποία θα μπορούσαν να ισορροπήσουν ή να πραγματοποιήσουν ένα κυνήγι θησαυρού αναζητώντας αντικείμενα στο περιβάλλον τους τα οποία έχουν παρόμοια σχήματα. Μια άλλη πρόκληση θα μπορούσε να περιλαμβάνει την αντιγραφή αυτών των αντικειμένων σε χαρτί, την αποκοπή των σχημάτων και στη συνέχεια την τοποθέτησή τους πάνω σε πλαστικές φιγούρες, παρακινώντας έτσι τους μαθητές σε μια αποστολή για την αποκατάσταση της ισορροπίας. Το να σχεδιάσετε μια γραμμή στο χαρτί στο σημείο όπου το αντικείμενο ισορροπεί μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση της έννοιας του σημείου ισορροπίας. Μια επιπλέον δραστηριότητα περαιτέρω διερεύνησης μπορεί επίσης να περιλαμβάνει την εξέταση των σχημάτων για τον εντοπισμό τυχόν συμμετρίας. Μια τελική δραστηριότητα εισάγει τη διαδικασία εξισορρόπησης μιας ράβδου (όπως για παράδειγμα μια σκούπα) με τα δύο χέρια. Θα μπορούσατε εύκολα να βρείτε το κέντρο βάρους της ράβδου αν τοποθετούσατε μια ράβδο σε δύο δάχτυλά σας, ένα από κάθε χέρι, σταδιακά φέρνοντας κοντά τα δύο σας χέρια. Παραδόξως, η ράβδος διατηρείται σε ισορροπία. Καθώς ενώνετε τα δάχτυλα, θα είστε σε θέση να εντοπίσετε το κέντρο βάρους της ράβδου.

«Δημιουργώντας Ομπρέλες» & «Βαρύκεντρο»

Οι εφαρμογές «Δημιουργώντας Ομπρέλες και «Βαρύκεντρο» είναι στενά συνδεδεμένες. Η πρώτη έχει σχεδιαστεί για την ανεξάρτητη χρήση της σε μια έκθεση, με τη χρήση μιας απλούστερης διεπαφής η οποία ήταν προσαρμοσμένη για παιδιά μικρότερης ηλικίας. Αντίθετα, η εφαρμογή «Βαύκεντρο» επεκτείνει τη λειτουργικότητα της πρώτης εφαρμογής, προσφέροντας τα ίδια χαρακτηριστικά αλλά και πιο σύνθετες επιλογές. Αυτή η προηγμένη έκδοση είναι καταλληλότερη για παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας και για καθοδηγούμενη χρήση με έναν εκπαιδευτικό.

Η εφαρμογή «Δημιουργώντας Ομπρέλες» απαιτεί την εξισορρόπηση ενός φύλλου οριζόντια πάνω σε μία ράβδο, σχηματίζοντας έτσι μια ομπρέλα. Μέσω της εφαρμογής σε ένα tablet, τα παιδιά μπορούν εύκολα να σχεδιάσουν απλές φιγούρες, ιδιαίτερα φύλλα, και να απεικονίσουν άμεσα το κέντρο βάρους τους. Η τοποθέτηση του φύλλου με αυτό το σημείο στην κορυφή της ράβδου εξασφαλίζει την επίτευξη ισορροπίας. Τα διαφανή σχήματα φύλλων μπορούν να βοηθήσουν στη σχεδίαση, ενώ μια εμπειρική προσέγγιση – η εξισορρόπηση δηλαδή των σχημάτων φύλλων με το χέρι προκειμένου να εντοπιστεί το βαρύκεντρο – μπορεί καταστεί ανάλογη με το υπολογιζόμενο βαρύκεντρο μέσω της εφαρμογής.

Η εφαρμογή «Βαρύκεντρο» επιτρέπει στους χρήστες να σχεδιάζουν διάφορα σχήματα σε ένα tablet, έχοντας τη δυνατότητα να εξερευνήσουν το κοινό βαρύκεντρο πολλαπλών σχημάτων παράλληλα με τα βαρύκεντρα των μεμονωμένων σχημάτων. Τα παιδιά μπορούν να επιλέξουν προκαθορισμένα σχήματα ή να εφαρμόσουν τη δημιουργικότητά τους σχεδιάζοντας τα δικά τους μοναδικά σχήματα.

Συμπληρωματικές Δραστηριότητες

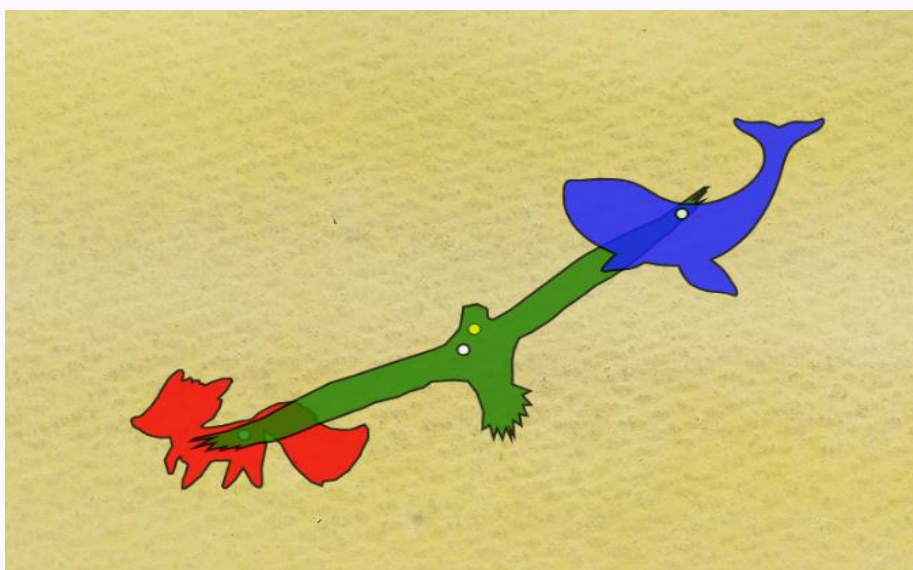
Τα παιδιά μπορούν να συμμετάσχουν σε μια πρακτική δραστηριότητα σχεδιάζοντας ένα μικρό σχήμα στο tablet και αναπαράγοντας τόσο το σχήμα όσο και το βαρύκεντρο του σε ένα κομμάτι χαρτί. Μόλις σχεδιαστεί, το σχήμα μένει «κλειδωμένο» στο tablet, οπότε εάν αγγίξετε την οθόνη δεν θα διαγραφεί το σχήμα παρά μόνο εάν κάνετε κλικ στο κουμπί με το μολύβι. Ρυθμίζοντας το tablet στη μέγιστη φωτεινότητα, καθίσταται εφικτή η αντιγραφή του περιγράμματος του σχήματος σ' ένα κομμάτι χαρτί τοποθετώντας το πάνω στην οθόνη του tablet.

Ενθαρρύνετε τα παιδιά να επανασχεδιάσουν το ίδιο σχήμα σε ελαφρώς μεγαλύτερες διαστάσεις, διατηρώντας μια σταθερή απόσταση μεταξύ του δακτύλου/της γραφίδας τους και των άκρων του σχήματος. Η σύγκριση των βαρυκεντρών των δύο σχημάτων θ' αποκαλύψει ότι είναι πανομοιότυπα.

Η περαιτέρω εξερεύνηση μπορεί να περιλαμβάνει την εξισορρόπηση διαφόρων αντικειμένων σε μία ράβδο ή σ' ένα δάχτυλο. Παραδείγματα αυτού περιλαμβάνουν την εξισορρόπηση ενός πιάτου σε μια ξύλινη ράβδο, κάτι το οποίο θυμίζει κόλπα που συναντά κανείς σε τσίρκο, ή την περιστροφή μιας μπάλας του μπάσκετ σ' ένα δάχτυλο. Κατά τις αρχικές προσπάθειες, οι μαθητές θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν μια πιο χοντρή ράβδο η οποία προσφέρει καλύτερη ισορροπία, προχωρώντας σταδιακά σε λεπτότερες ράβδους καθώς εξοικειώνονται με την δραστηριότητα.

Μέσω της εφαρμογής «Βαρύκεντρο», τα παιδιά μπορούν να κατασκευάσουν ένα κινητό παιχνίδι για παιδική κούνια, το οποίο περιλαμβάνει τρία επίπεδα σχήματα ισορροπημένα οριζόντια. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να προετοιμάσουν πρότυπα προς κοπή και τα παιδιά μπορούν να συναρμολογήσουν το κινητό παιχνίδι χρησιμοποιώντας κόλλα και σπάγκο. Εναλλακτικά, τα παιδιά θα μπορούσαν να σχεδιάσουν τα δικά τους σχήματα και να τα αποθηκεύσουν ως αρχεία PDF τα οποία ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να εκτυπώσει, και στη συνέχεια τα παιδιά μπορούν να δημιουργήσουν το δικό τους αυτοσχέδιο κινητό παιχνίδι για παιδική κούνια.

Σας προτείνουμε να χρησιμοποιήσετε την ακόλουθη δομή: Ένα μακρουλό σχήμα, το οποίο να μοιάζει μ' ένα πουλί με ανοικτές φτερούγες. Δύο επιπλέον σχήματα που θα χρειαστείτε θα μπορούσαν να είναι οτιδήποτε (π.χ. διάφορα ζώα). Το μακρουλό σχήμα πρέπει να κρέμεται από την οροφή μ' ένα κομμάτι σπάγκο. Τα άλλα δύο σχήματα πρέπει να κρέμονται με τη σειρά τους από το μακρουλό σχήμα χρησιμοποιώντας και πάλι ένα κομμάτι σπάγκο, και να έχουν μια συγκεκριμένη απόσταση μεταξύ τους (να τοποθετηθούν π.χ. στις άκρες των φτερών). Και τα τρία σχήματα διατηρούν οριζόντια ισορροπία. Χρησιμοποιήστε την εφαρμογή για να σχεδιάσετε τα σχήματα και τα σημειωμένα βαρύκεντρα για να βρείτε τις κατάλληλες θέσεις για την τοποθέτηση των σπάγκων.



Σύνδεση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η αξιοποίηση των ευκαιριών μάθησης όσον αφορά τα φαινόμενα της ισορροπίας και του βαρύκεντρου υποστηρίζει την ικανότητα καλύτερης εκτίμησης ποσοτήτων, εμβαδών και αποστάσεων και ταξινόμησής τους σε συστήματα.

Στα πλαίσια αυτών των δραστηριοτήτων προωθείται η ανάπτυξη μαθηματικών ικανοτήτων που σχετίζονται με τη διαχείριση, όπως η επικοινωνία, η αναπαράσταση, η επίλυση προβλημάτων, η επιχειρηματολογία, καθώς επίσης η μοντελοποίηση.

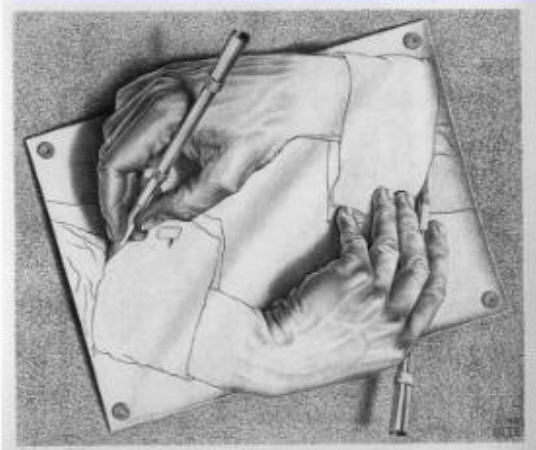
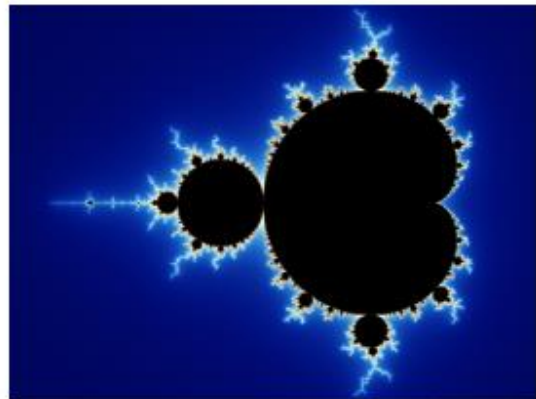
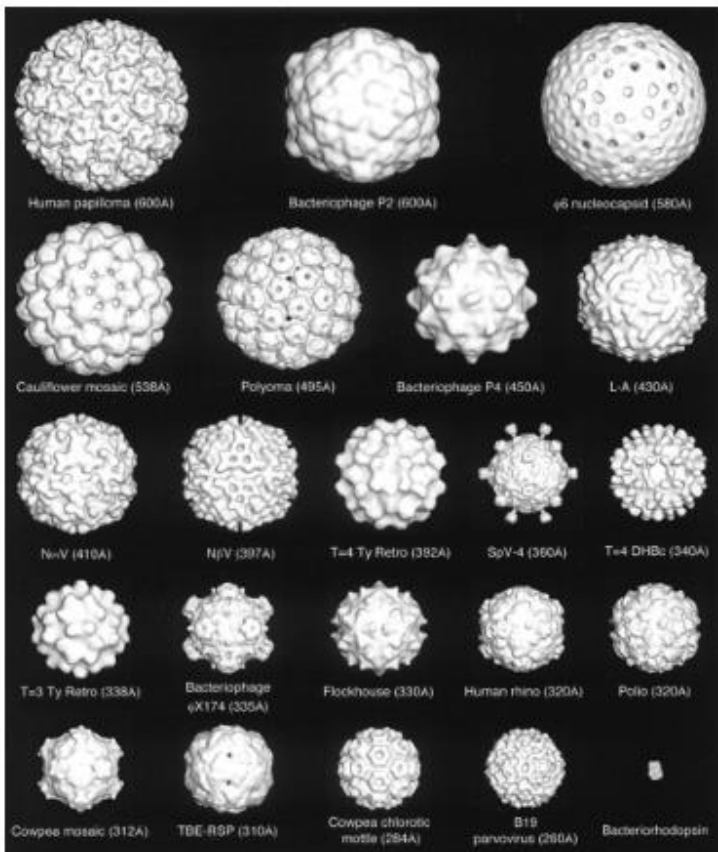
Ικανότητες όπως η σωστή ορθή σύγκριση των εμβαδών, των αριθμών και των βαρών, η δημιουργία και η επαλήθευση υποθέσεων και η ανάπτυξη μιας καλής κατανόησης των ποσοτήτων μπορούν να εξασκηθούν κατά την εξέταση των περιοχών ισορροπίας και του κέντρου βάρους διαφόρων αντικειμένων.

Το θεωρητικό υπόβαθρο που παρουσιάζεται στην αρχή αυτής της ενότητας υπερβαίνει τις απαιτήσεις όσον αφορά το περιεχόμενο των συνήθων αναλυτικών προγραμμάτων σε θέματα γεωμετρίας και μαθηματικών στο ηλικιακό πλαίσιο στόχο (παιδιά 3-8 ετών), ενώ συνήθως δεν καλύπτεται στα πλαίσια της εκπαίδευσης των νηπιαγωγών ή των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, τουλάχιστον όσον αφορά το συγκεκριμένο της Γερμανίας. Παρ' όλα αυτά, αναμένεται ότι θα παρέχει ένα πολύτιμο ευρύτερο σύνολο γνώσεων προς τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι μπορούν ν' αποφασίσουν ποιος είναι ο κατάλληλος τρόπος να εξοικειώσουν τα παιδιά με αυτές τις έννοιες. Μια τέτοια πρώιμη και συγκεκαλυμμένη έκθεση στις αφηρημένες έννοιες που κρύβονται πίσω από παιχνίδια και τις δραστηριότητες του έργου θα ενίσχυε την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων μπορεί επίσης να αξιοποιηθεί και για εφαρμογή σε υψηλότερα μαθησιακά επίπεδα όπως η δευτεροβάθμια εκπαίδευση, για την εισαγωγή, για παράδειγμα, των βασικών εννοιών του λογισμού, των ορίων, του διανυσματικού λογισμού (π.χ. το θεώρημα του Green για τον υπολογισμό του βαρύκεντρου), μεταξύ άλλων.

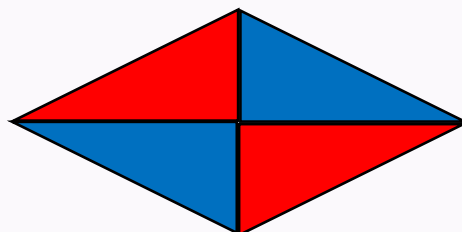
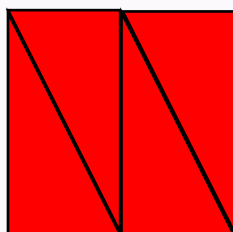
Καθρέφτες και συμμετρίες

Ορισμός της θεματικής

Λίγες μόνο έννοιες μπορούν να συνδεθούν με την ανθρώπινη εμπειρία όσο η συμμετρία. Από τις πιο φυσικές και αυθόρμητες ανακαλύψεις ενός μικρού παιδιού (το σώμα, τα χέρια,..., ο καθρέφτης!), στις διάφορες μορφές των τεχνών – τη γλυπτική, τη μουσική, την αρχιτεκτονική, τη ζωγραφική – και τις επιστήμες – τη χημεία, τη φυσική, τη βιολογία και, φυσικά, τα μαθηματικά.¹



Στην περίπτωση αυτή, οι πιο σύνθετες διεργασίες αξίζουν όσο η ανακάλυψη που πιθανόν να κάνει ένα εντεκάχρονο κορίτσι όταν συνειδητοποιεί ότι δεν μπορεί να μετατρέψει ένα πολύγωνο σ' ένα άλλο μόνο με μια μεταφορά ή μια περιστροφή, αλλά ότι πρέπει να επιτύχει τον στόχο της εφαρμόζοντας μια συμμετρία!



¹ Το 2019, σε συνεργασία με το Ίδρυμα EduCaixa, το MMACA διοργάνωσε μια σειρά συνεδρίων όπου αναπτύξαμε την έννοια της συμμετρίας μέσα από τη μουσική, τις πλαστικές τέχνες, τον κινηματογράφο, τη λογοτεχνία και τη γλώσσα της μουσειογραφίας. https://cosmocaixa.org/es/p/espejos-y-simetrias_c379563

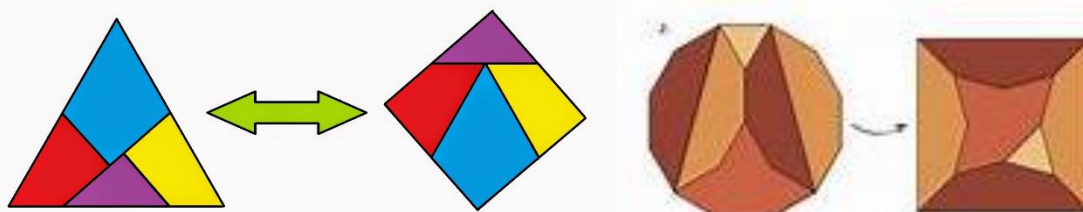
Μόλις ανακαλυφθεί, η έννοια της συμμετρίας γίνεται ασυναίσθητα μέρος της μαθηματικής μας αίσθησης, αλλά όλοι έχουμε δει πόσο δύσκολο είναι για τα παιδιά μικρότερης ηλικίας να κάνουν αυτό το μικρό, αλλά ταυτόχρονα μεγάλο βήμα και να «σπάσουν» τον δεσμό του φύλλου χαρτί ή της σανίδας και να εκτελέσουν μια υπέροχη τούμπα στον αέρα.

Η έννοια της συμμετρίας είναι τόσο εγγενής στην ανθρώπινη σκέψη που συχνά αντιπροσωπεύει την κύρια προσέγγιση που ακολουθούμε για την επίλυση ενός προβλήματος.

Ένα καλό παράδειγμα αυτού αφορά την ισοδυναμία μεταξύ των πολυγώνων μέσω της αποσύνθεσης και ανασύνθεσης των επιμέρους κομματιών τους.

Παράδειγμα:

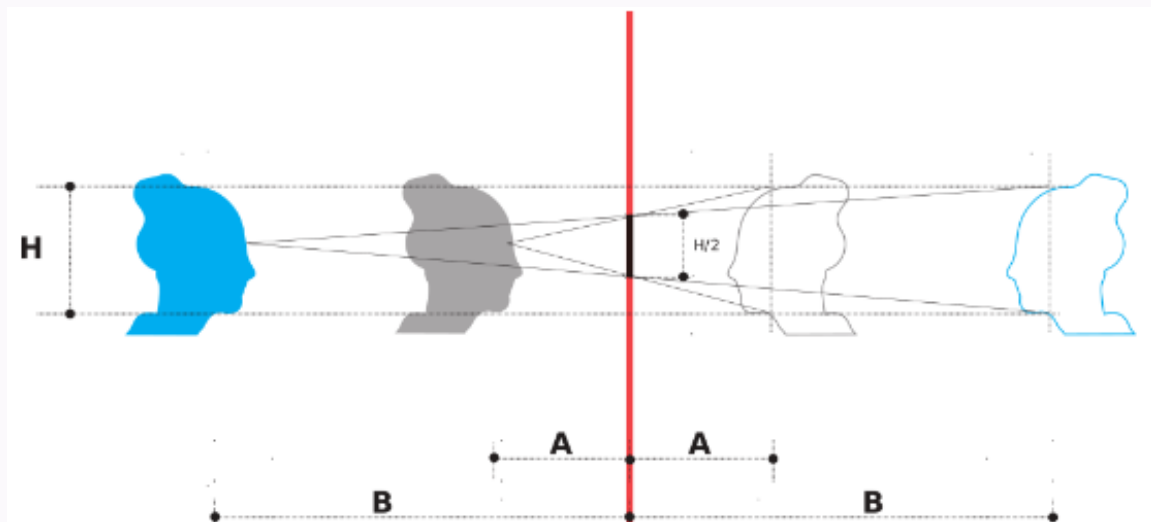
Εάν από ένα αφελές, εκ των προτέρων (a priori) όραμα, μπορεί να φαίνεται ευκολότερο να μετατρέψουμε ένα τρίγωνο σε τετράγωνο παρά ένα δωδεκάγωνο σε τετράγωνο (και αντίστροφα), στην πραγματικότητα ισχύει το αντίθετο. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι η αρχή της συμμετρίας διέπει τον μετασχηματισμό του δωδεκαγώνου:



Όταν τα μαθηματικά αποφάσισαν να «ξεφύγουν» από τον ρόλο τους ως μια άγονος και αφηρημένος επιστημονικός κλάδος και να αναδείξουν την πιο παιχνιδιάρικη πτυχή τους, η οποία τα φέρνει πιο κοντά στις καθημερινές εμπειρίες των ανθρώπων, η έννοια της συμμετρίας, τόσο με τη χρήση όσο και χωρίς τη χρήση καθρεφτών, απέκτησε μια συνάφεια στο πλαίσιο των μουσείων.

Ένα μεγάλο μέρος της έκθεσης MateMilano και ολόκληρη η έκθεση MMACA στο Castelldefels ήταν αφιερωμένη στην έννοια της συμμετρίας. Εντούτοις, τα εκθέματα που σχετίζονταν με τη συμμετρία, οι καθρέφτες και τα καλειδοσκόπια αποτελούν μέρος όλων των επιστημονικών και τεχνολογικών εκθέσεων που εκτίθενται στα κορυφαία μουσεία μαθηματικών.

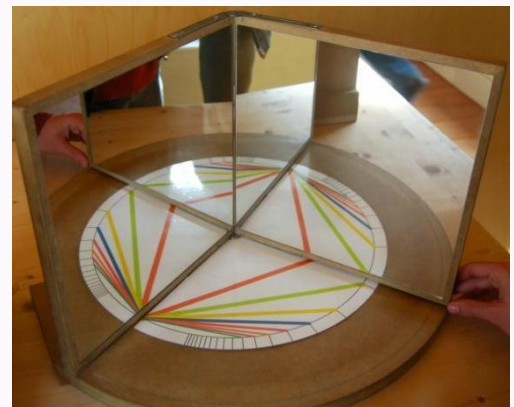
Οι διάφορες εμπειρίες που προσφέρονται μέσω των προσφερόμενων εκθεμάτων μπορεί να ποικίλλουν, από την ενοχλητική εμπειρία του Λαβύρινθου με Καθρέφτες (Mirror Labyrinth) στο Tibidabo, έως εκθέματα τα οποία κάνουν τον χρήστη να σκεφτεί μια εμπειρία η οποία φαινομενικά καταστρέφει την εμπειρία όλων των υπολοίπων. Τα εκθέματα καλούν τους επισκέπτες να μετρήσουν τις διαστάσεις του προσώπου τους το οποίο αντικατοπτρίζεται σ' έναν συνηθισμένο καθρέφτη, και στη συνέχεια ν' ανακαλύψουν ότι η εικόνα ουσιαστικά αποτελεί το ήμισυ του αντικειμένου (το πρόσωπό τους) και ότι οι διαστάσεις της δεν αλλάζουν όταν το άτομο μετακινείται πιο κοντά ή πιο μακριά από τον καθρέφτη. Τι είναι αυτό που συμβαίνει άραγε;



Η φυσική εξηγεί το φαινόμενο, αλλά για να το αποδεχτεί κανείς πραγματικά απαιτείται συλλογισμός και λίγος χρόνος που χρειάζεται να αφιερώσετε λεκιάζοντας έναν καθρέφτη σας στο σπίτι χαράζοντάς τον με την άκρη ενός σαπουνιού ή χρησιμοποιώντας έναν μαρκαδόρο για μαυροπίνακα.

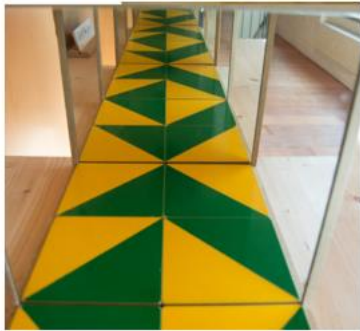
Η ακόλουθη ανακάλυψη θα γίνει εφικτή με τη χρήση ενός ζεύγους καθρεφτών οι οποίοι συνδέονται κατά μήκος μιας από τις πλευρές τοποθετημένοι με τρόπο ο οποίος τους κάνει να μοιάζουν μ' ένα ανοικτό βιβλίο τοποθετημένο κάθετα, και οι οποίοι θα «πολλαπλασιάσουν» ένα νόμισμα ή τον αριθμό των πλευρών ενός πολυγώνου καθώς η γωνία μεταξύ των καθρεφτών ποικίλλει.

Το έκθεμα με την ονομασία «Βιβλίο από Καθρέφτες» (“Book of Mirrors”) με εσωτερική γωνία 90° διαχωρίζει την δεξιά από την αριστερή πλευρά: τοποθετήστε τον εαυτό σας ακριβώς στο κέντρο μεταξύ των καθρεφτών και αγγίξτε το αυτί σας με το δεξί σας χέρι. Ποιο χέρι χρησιμοποίησε το είδωλό σας; Τώρα, περιστρέψτε το βιβλίο ενώ είστε ακόμα ορατοί σε αυτό. Γιατί το είδωλό σας περιστρέφεται ανάποδα; Κατά πόσες μοίρες περιστρέψατε το Βιβλίο από Καθρέφτες; Κατά 90° ή 180° ;



Μήπως από αυτό συμπεραίνουμε ότι ένας καθρέφτης πολλαπλασιάζει ένα είδωλο επί δύο, δύο καθρέφτες επί τέσσερα, ενώ τοποθετούνται τρεις καθρέφτες για να σχηματίσουν την εσωτερική ακμή ενός κύβου; Ας προσπαθήσουμε ν' ακολουθήσουμε ένα μονοπάτι που αντανακλάται σ' έναν καθρέφτη με τα δάκτυλά μας. Θα το επιχειρήσουμε αυτό κινώντας τα δάκτυλά μας προς τα εμπρός ή προς τα πίσω; Πώς θα μετακινήσετε το δάκτυλό σας εάν η καμπύλη διαδρομής ταλαντεύεται προς τ' αριστερά;

Ας συνεχίσουμε να σχεδιάζουμε ατέρμονα ψηφιδωτά ανάμεσα σε παράλληλους καθρέφτες και να μην ξεγελιόμαστε από τις ψευδείς αναλογίες του δωματίου του Ames.



Τελικά εγκαταλείπουμε πριν από τα καλειδοσκόπια, όπου ένα τμήμα δημιουργεί τα 20 τρίγωνα ενός εικοσαέδρου ή, αν μετακινηθεί κάθετα, τα 12 πεντάγωνα ενός δωδεκάεδρου. Είναι μια σωστή μετουσίωση του παιχνιδιού, ακριβώς όπως το τηλεσκόπιο του Γαλιλαίου.

Σύνδεση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η έννοια της συναρμολόγησης των σχημάτων διαδραματίζει θεμελιώδη ρόλο στο σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα κατά τον πρώτο κύκλο μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτός ο κύκλος, στον οποίο εμπίπτουν τα παιδιά ηλικίας 3 έως 6 ετών, αποτελεί μια κρίσιμη περίοδο γνωστικής ανάπτυξης και προετοιμασίας για μια πιο τυπική μαθηματική εκπαίδευση. Η εξερεύνηση και ο χειρισμός γεωμετρικών σχημάτων κατά τα πρώτα χρόνια του νηπιαγωγείου είναι απαραίτητα, προκειμένου να τεθούν οι βάσεις για τη μαθηματική κατανόηση.

Πρώτον, αυτοί οι μαθητές ενθαρρύνονται να χειρίζονται και να εξερευνούν διάφορα γεωμετρικά σχήματα (Pattern Blocks) με συγκεκριμένο τρόπο. Μαθαίνουν ν' αναγνωρίζουν αυτά τα σχήματα στο καθημερινό τους περιβάλλον, είτε μέσω παιχνιδιών, αντικειμένων ή ακόμα και αρχιτεκτονικών στοιχείων. Αυτό το αρχικό βήμα εξοικειώνει τους νεαρούς μαθητές με βασικά σχήματα όπως οι κύκλοι, τα τετράγωνα, τα τρίγωνα και τα ορθογώνια, καθώς επίσης με το πώς να συνθέσουν μερικά από αυτά για να σχηματίσουν ένα άλλο σχήμα, για παράδειγμα πώς από ένα κανονικό τρίγωνο να σχηματίσουν έναν ρόμβο, ένα τραπέζιο ή ένα εξάγωνο.

Στη συνέχεια, μαθαίνουν πώς να ονομάζουν αυτά τα σχήματα, γεγονός που όχι μόνο ενισχύει το λεξιλόγιό τους, αλλά πάνω απ' όλα φανερώνει τη χρησιμότητα του ορισμού και του καθορισμού των χαρακτηριστικών ενός αντικειμένου, συμπυκνώνοντάς τα σε ένα όνομα.

Μαθαίνουν επίσης να διαφοροποιούν τις ιδιότητες των σχημάτων, όπως η αναγνώριση της έννοιας της περιοδικότητας και των μοτίβων, και να συγκρίνουν τις διαστάσεις: πλευρές και επιφάνειες. Αυτό είναι ένα κρίσιμο βήμα για την ανάπτυξη της ικανότητάς τους να επικοινωνούν και να περιγράφουν τα σχήματα με ακρίβεια.

Η συναρμολόγηση γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί βασική παιδαγωγική δραστηριότητα. Οι μαθητές αρχίζουν να δημιουργούν συνθέσεις χρησιμοποιώντας αυτά τα βασικά σχήματα, δραστηριότητες οι οποίες αναπτύσσουν τη χωρική σκέψη και τη δημιουργικότητά τους, που διεγείρονται περαιτέρω από τον διπλασιασμό των σχημάτων στον καθρέφτη.

Στη δεύτερη φάση της μαθηματικής τους εκπαίδευσης, ο καθρέφτης μπορεί να γίνει το εργαλείο για τη διαίρεση των σχημάτων σε μικρότερες μονάδες οι οποίες μπορούν να επαναλαμβάνονται με τρόπο περιοδικό, αν εντοπιστεί ο άξονας ή το κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος.

Αυτά αντιπροσωπεύουν τα βήματα για την εισαγωγή δύο διαφορετικών προσεγγίσεων εντός του παρόντος διαλόγου: την αναλογική προσέγγιση, η οποία είναι βασισμένη στην παρατήρηση, και την αναλυτική προσέγγιση, η οποία είναι βασισμένη στην αναγνώριση των μεταβλητών και την ανάπτυξη στρατηγικών.

Για την έναρξη του επόμενου κύκλου της μαθηματικής τους εκπαίδευσης (ηλικίες 6 έως 8 ετών), οι μαθητές συνεχίζουν τη μαθηματική τους μάθηση εδραιώνοντας τις σταθερές βάσεις που αποκτήθηκαν κατά τον πρώτο κύκλο. Αυτή η αρχική φάση του δεύτερου κύκλου χαρακτηρίζεται από μια βαθύτερη εξερεύνηση των γεωμετρικών σχημάτων. Οι μαθητές, οι οποίοι είναι πλέον πιο εξοικειωμένοι με τα τετράγωνα, τα ορθογώνια και τα τρίγωνα, μπορούν να προχωρήσουν περαιτέρω. Αρχίζουν να δημιουργούν πιο σύνθετα σχήματα χρησιμοποιώντας αυτά τα βασικά σχήματα ως κομμάτια ενός μαθηματικού παζλ, ενώ η νοητική διεργασία της άθροισης παίρνει τη θέση της απλής καταμέτρησης.

Οι μαθητές συνεχίζουν να διερευνούν και να εντοπίζουν γεωμετρικές σχέσεις, ενισχύοντας έτσι την κατανόησή τους όσον αφορά την έννοια της συμμετρίας και της ευθυγράμμισης σε συγκεκριμένα πλαίσια.

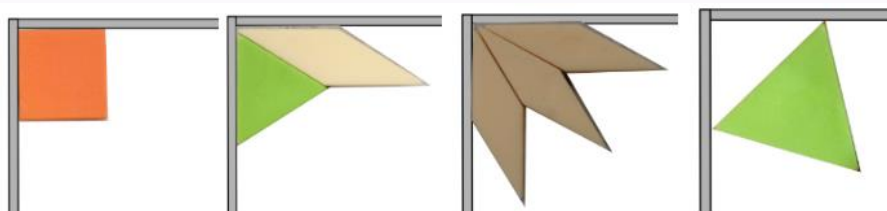
Τέλος, η συναρμολόγηση γεωμετρικών σχημάτων συνδέεται φυσικά με άλλες μαθηματικές δεξιότητες. Οι μαθητές αρχίζουν να κατανοούν τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού κατά την ενασχόλησή τους με επίπεδα σχήματα (η έννοια του βαρύκεντρου είναι ένα κατάλληλο επόμενο βήμα, ανατρέξτε στο κεφάλαιο για την έννοια της Ισορροπίας), ενισχύοντας τη συνολική τους κατανόηση όσον αφορά τα μαθηματικά και την ικανότητά τους να επιλύουν προβλήματα με τρόπο ολιστικό, παράλληλα εκφράζοντας πλέον το φαινόμενο της περιοδικότητας στη μορφή τύπων.

Εκθέματα του έργου SMEM που σχετίζονται με την έννοια της Συμμετρίας

Ανοιξιάτικα Λουλούδια

Θα μπορούσατε να σχεδιάσετε διαφορετικά σχήματα τοποθετώντας pattern blocks μπροστά από καθρέφτες οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σχηματίζοντας ένα βιβλίο, με εσωτερική γωνία 90°.

Είναι λογικό ότι μόνο εκείνα τα σχήματα τα οποία είτε μόνα τους είτε σε συνδυασμό σχηματίζουν ορθές γωνίες θα ταιριάζουν μεταξύ των καθρεφτών. Σε άλλες περιπτώσεις, θα εμφανιστούν κενές περιοχές στη κατασκευή, οι οποίες θα αναπαραχθούν συμμετρικά.



Η δραστηριότητα θα μπορούσε να περιλαμβάνει την καθοδήγησή τους μέσω της αναπαραγωγής σχημάτων των οποίων η πολυπλοκότητα αυξάνεται με τρόπο προοδευτικό, και τα οποία προβάλλονται από τον/την εκπαιδευτικό στον πίνακα. Ο/η εκπαιδευτικός θα μπορούσε ακόμη να ενθαρρύνει τους μαθητές να επινοήσουν τις δικές τους πρωτότυπες κατασκευές. Ο αναστοχασμός γίνεται απαραίτητος, προτρέποντας έτσι την ανάλυση με βάση τις γνώσεις που διαθέτουν οι

μαθητές σε κάθε σχολική βαθμίδα, λαμβάνοντας υπόψη θέματα όπως οι γωνίες, η σύνθεση των σχημάτων (επισημαίνοντας την ισότητα των πλευρών τους), η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ διαφορετικών εμβαδών και ούτω καθεξής.

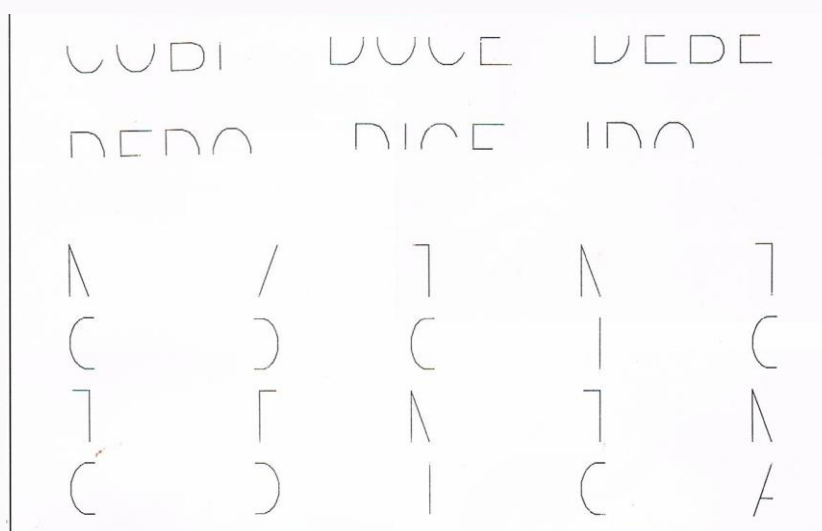
Μια άλλη προηγμένη δεξιότητα είναι ο προσδιορισμός της συμμετρίας σε συγκεκριμένα σχήματα.

Μια συναρπαστική δραστηριότητα η οποία όμως έχει ιδιαίτερα ισχυρό συναισθηματικό αντίκτυπο, και για την οποία είναι απαραίτητο να μεσολαβήσει ο/η εκπαιδευτικός είναι να τραβήξετε μια selfie με την κάμερα ευθυγραμμισμένη παράλληλα με το πρόσωπο και στη συνέχεια να αναπαραγάγετε κάθε μισό του προσώπου χρησιμοποιώντας έναν καθρέφτη. Αυτή η άσκηση προκαλεί το εξής ερώτημα: Είναι το πρόσωπό μας πραγματικά συμμετρικό;

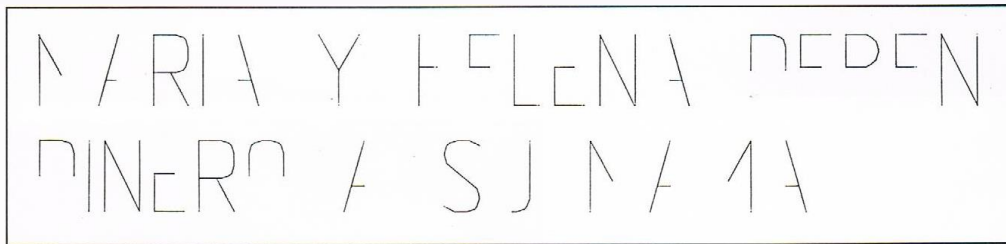


Μια άλλη δραστηριότητα διερεύνησης θα μπορούσε να ήταν η μελέτη της συμμετρίας των κεφαλαίων γραμμάτων.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα με ισπανικές λέξεις μπροστά από έναν καθρέφτη, αλλά μια πιο εύκολη δραστηριότητα για τους μαθητές σας θα μπορούσε να ήταν να βρουν λέξεις στη δική σας γλώσσα που θα μπορούσατε να διαβάσετε χρησιμοποιώντας έναν καθρέφτη.

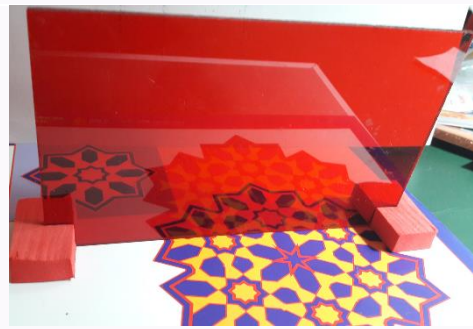
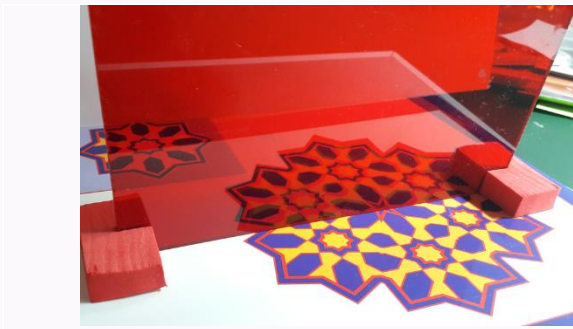


Και εδώ μπορείτε να δείτε τα (ισπανικά) Μυστικά Μηνύματα.



Η συμμετρία των πολυγώνων μπορεί να οδηγήσει σε δραστηριότητες εμπλοκής των μαθητών, προχωρώντας σε ολοένα και πιο πολύπλοκες δραστηριότητες, όπως η αναζήτηση του ελάχιστου τμήματος το οποίο, με τη βοήθεια ενός ή δύο καθρεφτών, επιτρέπει την ανακατασκευή ολόκληρης του σχήματος.

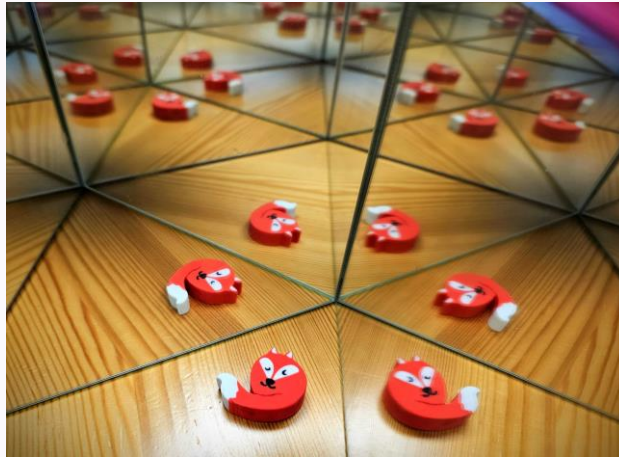
Τα εργαλεία τα οποία διευκολύνουν τη διεξαγωγή αυτών των δραστηριοτήτων διερεύνησης της έννοιας της συμμετρίας περιλαμβάνουν το Mira (με εικόνα) και το Georeflector, τα οποία αποτελούν ημιδιαφανή πλαστικά φύλλα. Τοποθετημένα πάνω σ' ένα σχήμα, αποκαλύπτουν το «κρυμμένο» και μερικώς ανακλώμενο μισό του σχήματος. Η ανακάλυψη του άξονα συμμετρίας πραγματοποιείται όταν και τα δύο μισά ευθυγραμμίζονται.



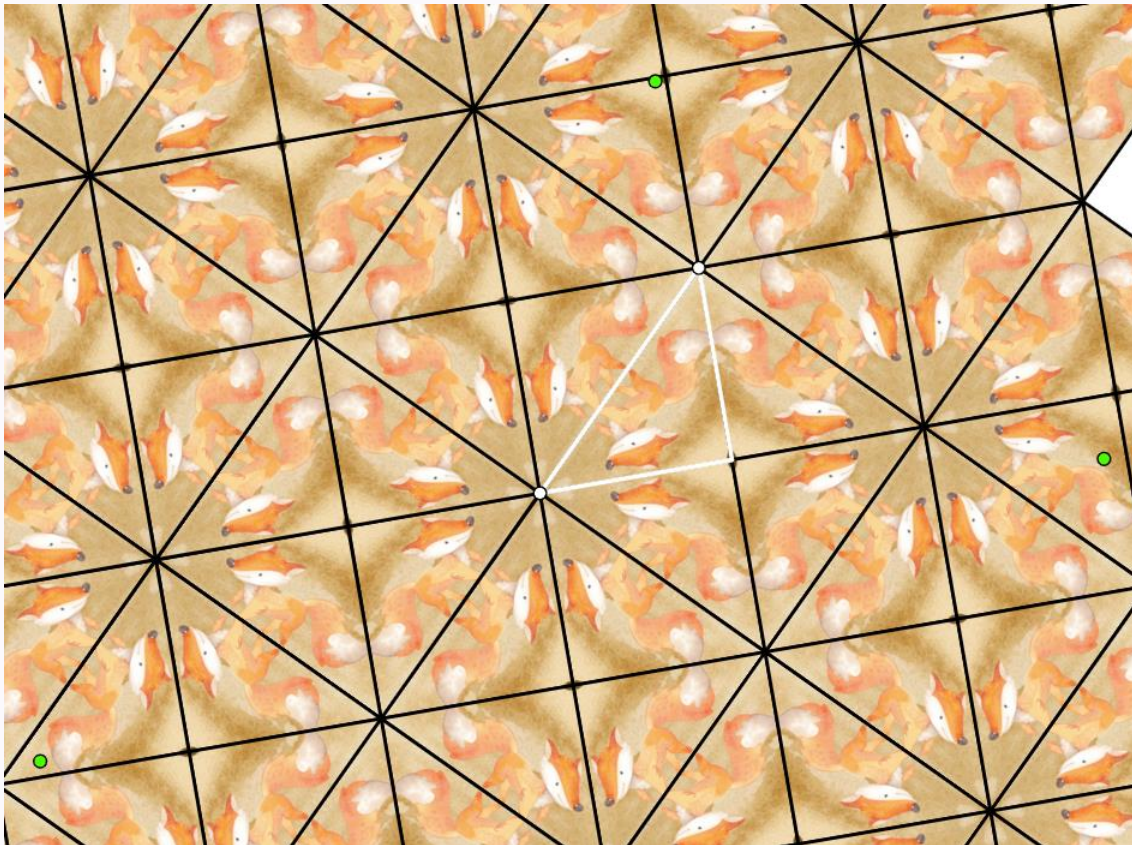
Καλειδοσκοπία

Αφού εξερευνήσετε το έκθεμα με την ονομασία «Ανοιξιάτικα Λουλούδια», το επόμενο βήμα είναι να προχωρήσετε από δύο καθρέφτες σε τρεις, σχηματίζοντας έτσι ένα τρίγωνο. Αυτή η μετάβαση οδηγεί στο έκθεμα με την ονομασία «Καλειδοσκοπία», τόσο στη φυσική όσο και στην εικονική του έκδοση. Σε αντίθεση με τις ροζέτες («λουλούδια») που παρατηρούνται εξωτερικά με δύο καθρέφτες, ένα τρίπλευρο καλειδοσκόπιο γεμίζει ολόκληρο το επίπεδο με μοτίβα, προσφέροντας μια πιο εντυπωσιακή εμπειρία, όμως, ταυτόχρονα, είναι πιο δύσκολο να δει κανείς με γωνία, οπότε παρέχουμε μια εικονική εναλλακτική λύση στο έκθεμα παράλληλα με τους φυσικούς καθρέφτες.

Το έκθεμα διαθέτει καλειδοσκοπία διαμορφωμένα σε σχήμα ειδικών τριγώνων με γωνίες των $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$, και $(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$. Όταν τοποθετείτε ένα αντικείμενο μέσα σε αυτά τα καλειδοσκόπια, οι αντανάκλασεις τους γεμίζουν το επίπεδο όπως φαίνεται παρακάτω:



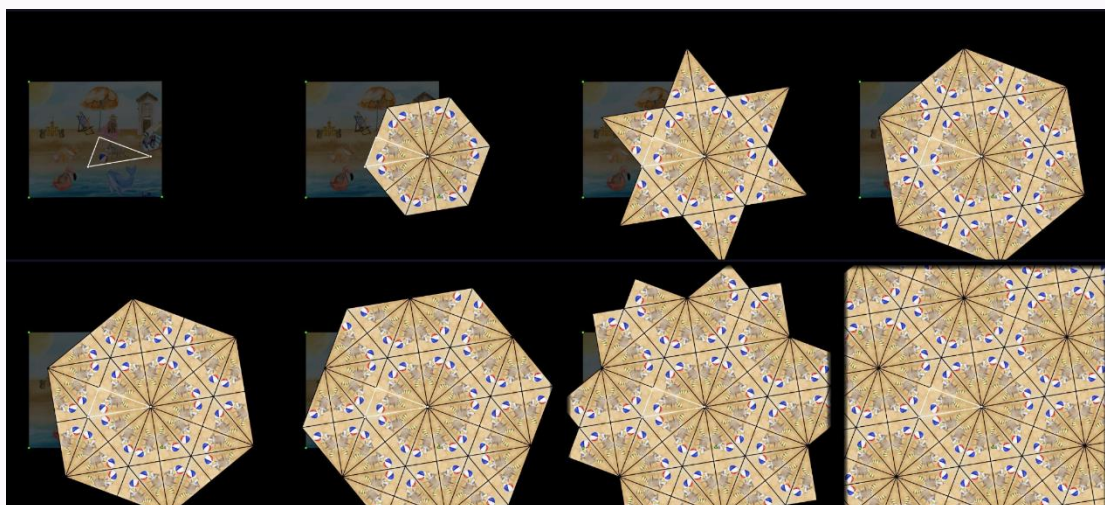
Η παραπάνω φωτογραφία παρουσιάζει μια φυσική διάταξη της διάταξης $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ των καθρεφτών, δηλαδή ένα ισόπλευρο τρίγωνο που σχηματίζεται από τους τρεις καθρέφτες. Το παρακάτω στιγμιότυπο οθόνης είναι η εικονική παρουσίαση του εκθέματος που απεικονίζει ένα ισοσκελές, ορθογώνιο τρίγωνο για τη διάταξη $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ του καλειδοσκοπίου, παρόμοιο με τη διάταξη του καθρέφτη στο έκθεμα «Ανοιξιάτικα Λουλούδια».



Η αρχική εικόνα της Έμυ της Αλεπούς επισημαίνεται εντός του περιγεγραμμένου τριγώνου, ενώ όλα τα άλλα αντίγραφα αντιπροσωπεύουν κατοπτρικές εικόνες του πρωτοτύπου και κατοπτρικές εικόνες κατοπτρικών εικόνων και κατοπτρικές εικόνες κατοπτρικών εικόνων κατοπτρικών εικόνων ... κ.λπ. Το πιάνεις το νόημα!

Το εικονικό έκθεμα σας επιτρέπει να επιλέξετε τον αριθμό των κατοπτρικών εικόνων που είναι ορατές στην οθόνη, μέχρι έναν ορισμένο βαθμό, ξεκινώντας χωρίς κατοπτρικές εικόνες, στη συνέχεια δείχνοντας τη ροζέτα δύο κατόπτρων και προσθέτοντας όλο και περισσότερες κατοπτρικές

εικόνες έξω από τη ροζέτα (διατηρώντας την κυκλική συμμετρία) έως ότου ολόκληρο το (ορατό) επίπεδο γεμίσει με κατοπτρικές εικόνες.



Ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο που καλύπτει το επίπεδο ονομάζεται περιοδική πλακόστρωση ή ψηφιδωτή κατασκευή. Μπορεί ν' αποτελείται από διάφορα γεωμετρικά σχήματα (που ονομάζονται πλακίδια) διατεταγμένα χωρίς να επικαλύπτονται ή να έχουν κενά μεταξύ τους, καλύπτοντας έτσι το επίπεδο. Στην περίπτωση μας, χρησιμοποιούμε μόνο έναν τύπο πλακιδίου – ένα τρίγωνο. Έχουμε επιλέξει τις γωνίες ώστε να δημιουργήσουμε ένα πλακίδιο. Θα μπορούσατε να εξερευνήσετε κατά πόσο υπάρχουν άλλου είδους τριγωνικά πλακάκια που επιτρέπουν την πλακόστρωση του επιπέδου.

Μία μοναδική περιοδική πλακόστρωση προκύπτει όταν ένα μόνο κανονικό πλακίδιο χρησιμοποιείται πολλές φορές, επεκτεινόμενο έτσι απείρως σε όλη την επιφάνεια του επιπέδου. Ένα κανονικό πλακίδιο συνεπάγεται ότι όλες οι πλευρές του έχουν το ίδιο μήκος και όλες οι γωνίες του είναι ίσες. Για παράδειγμα, το απλούστερο κανονικό σχήμα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε με τη διάταξη $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ των καθρεφτών δημιουργείται μια κανονική περιοδική πλακόστρωση, η οποία εμφανίζει διάφορους τύπους συμμετριών:

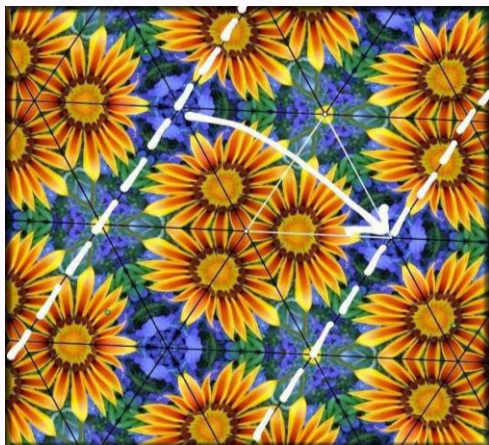


Κοιτάζοντας την εικόνα, μπορείτε να παρατηρήσετε διαφορετικούς τύπους συμμετριών:



Την περιστροφική συμμετρία (rotational symmetry) είναι καλύτερο να την φανταστεί κανείς επιλέγοντας οποιανδήποτε κατακόρυφο οποιουδήποτε από τα τρίγωνα. Τώρα κρατήστε αυτό το σημείο σταθερό και περιστρέψτε το μοτίβο γύρω από αυτό το σημείο. Μπορείτε να το κάνετε αυτό εξ ολοκλήρου νοερά ή στην πραγματικότητα να περιστρέψετε ένα εκτυπωμένο αντίγραφο το οποίο να στερεώσετε με μια καρφίτσα. Εάν χρησιμοποιείτε μια φυσική εκδοχή του εκθέματος, πρέπει να φανταστείτε ότι το μοτίβο συνεχίζεται άπειρα, καλύπτοντας ολόκληρο το επίπεδο (όχι μόνο το χαρτί). Μετά από μια στροφή 60° , φτάνετε σε μια κατοπτρική εκδοχή του μοτίβου με το οποίο ξεκινήσατε. Μετά από μια ακόμη περιστροφή άλλων 60° , φτάνετε στο αρχικό

μοτίβο. Αυτός ο τύπος συμμετρίας ονομάζεται τριπλή περιστροφική συμμετρία ή 3-fold symmetry (δεδομένου ότι κατά τη διάρκεια μιας ολόκληρης περιστροφής 360° , το αρχικό μοτίβο θα αποτυπωθεί τρεις φορές).



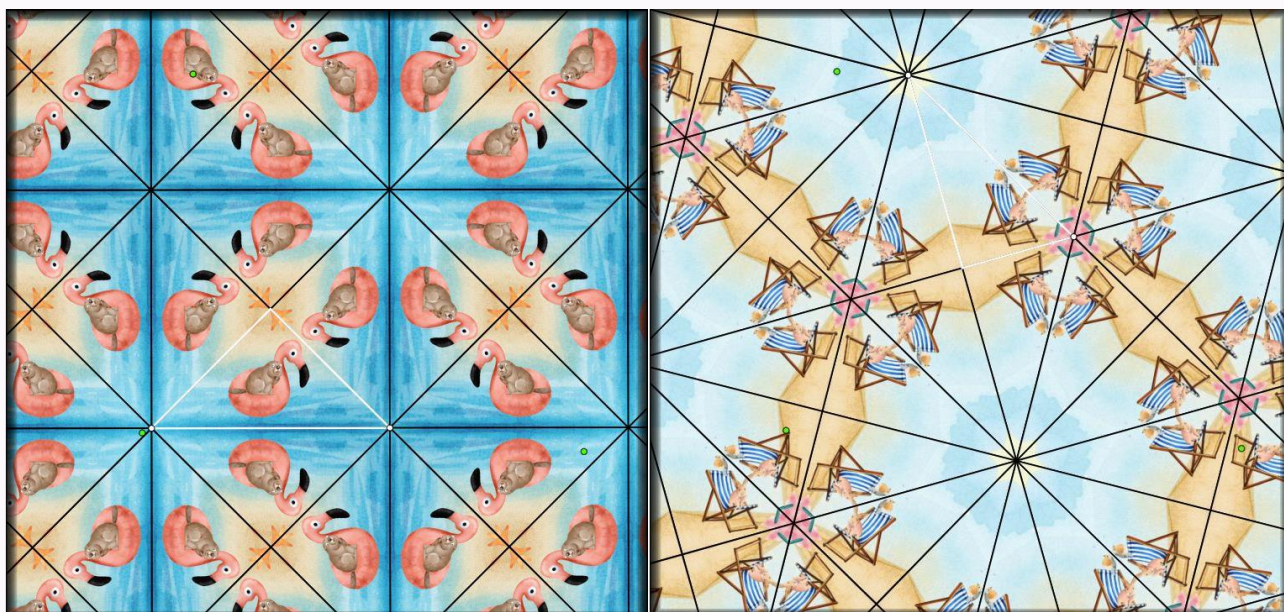
Η μεταφορική συμμετρία (translational symmetry) επιτυγχάνεται με τη μετατόπιση του πλήρους μοτίβου κατά μία ορισμένη απόσταση προς την ίδια κατεύθυνση, καταλήγοντας στο ίδιο μοτίβο με το οποίο ξεκινήσατε. Στην εικόνα που παρουσιάζεται δίπλα, επιλέξτε μία από τις ευθείες γραμμές. Μπορεί να είναι είτε μία από τις οριζόντιες γραμμές, είτε κάποια από τα είδη ευθειών που διασχίζουν την εικόνα υπό γωνία (πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά, ή κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά). Ανεξάρτητα από την ευθεία που θα επιλέξετε, θα υπάρχουν περισσότερες του ίδιου είδους, όλες παράλληλες μεταξύ τους. Στο σημείο αυτό, μπορείτε να φανταστείτε ότι παίρνετε την ευθεία της επιλογής σας και την τοποθετείτε στην κορυφή της μεθεπόμενης στη σειρά παράλληλης ευθείας, φτάνοντας στο ίδιο μοτίβο με το οποίο ξεκινήσατε. (Δεν θα λειτουργήσει εάν σταματήσετε στην επόμενη παράλληλη ευθεία που θα συναντήσετε, καθώς στην περίπτωση αυτή απλώς θα φτάσετε σε μια κατοπτρική εικόνα του αρχικού μοτίβου. Προσπαθήστε να το φανταστείτε νοερά.)



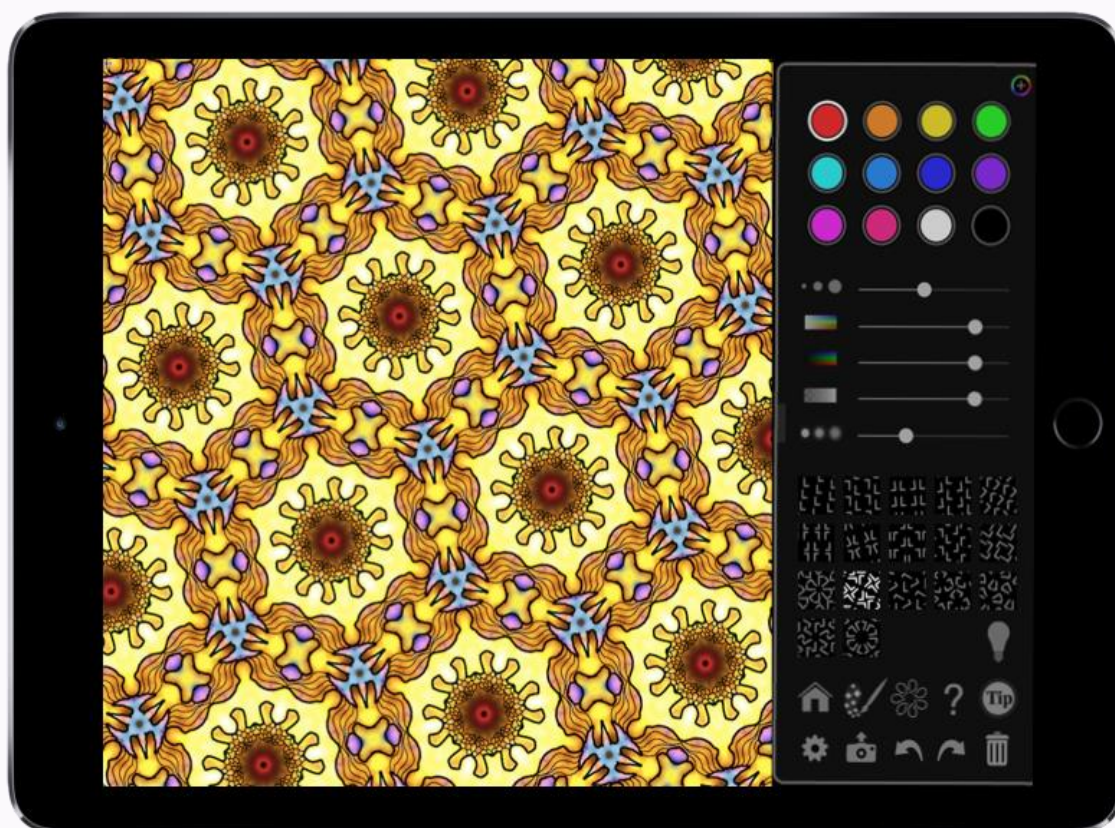
Η ανακλαστική ή γραμμική συμμετρία, ή αλλιώς συμμετρία καθρέφτη (Reflectional symmetry) είναι το πιο διαισθητικό είδος συμμετρίας. Μπορείτε να φανταστείτε την τοποθέτηση ενός καθρέφτη σε οποιονδήποτε από τους τρεις τύπους ευθειών τις οποίες έχουμε ήδη εντοπίσει στην περίπτωση της μεταφορικής συμμετρίας, καταλήγοντας στο ίδιο μοτίβο.

Στη συνέχεια, υπάρχει την ολισθαίνουσα ανακλαστική συμμετρία (Glide Reflection), η οποία αποτελεί έναν συνδυασμό μεταφορικής και ανακλαστικής συμμετρίας. Έτσι, φανταστείτε ότι μετακινείτε ολόκληρο το μοτίβο και ότι στη συνέχεια το αντικατοπτρίζετε (ή αντίστροφα), καταλήγοντας στο ίδιο μοτίβο ξανά.

Ως ένα είδος εξάσκησης, μπορείτε να προσπαθήσετε να προσδιορίσετε τα διαφορετικά είδη συμμετρίας που δημιουργούνται από τις άλλες δύο τριγωνικές διατάξεις καθρεφτών.



Εάν είστε εθισμένοι στην ομορφιά της περιοδικής πλακόστρωσης, μπορείτε να ανατρέξετε στην εφαρμογή iOrnament² ή Morenaments³, η οποία σας επιτρέπει να σχεδιάσετε τα δικά σας μοτίβα σε οποιαδήποτε από τις 17 ομάδες συμμετρίας. (Σας προτρέπουμε επίσης να ψάξετε περισσότερα για την έννοια των ομάδων συμμετρίας. Ένα καλό σημείο από το οποίο μπορείτε να ξεκινήσετε είναι η ανοικτή πλατφόρμα Mathigon⁴). Τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία θα είναι σε θέση να δημιουργήσουν νέα μοτίβα από το μηδέν.



² <https://www.science-to-touch.com/en/iOrnament.html> (διαθέσιμο μόνο για MacOS)

³ <https://www.imaginary.org/program/morenaments>

⁴ <https://mathigon.org/course/transformations/symmetry-groups>

Φίλοι Καθρέφτες

Το αρχικό έκθεμα, το οποίο προτείνει το MMACA για μαθητές ηλικίας 6 έως 10 ετών, είναι κατά κάποιο τρόπο απλούστερο, αλλά απαιτεί ελάχιστα εργαλεία νοητικού υπολογισμού και γνώση των μαθηματικών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (παράγοντες 2 και 3).

Αποτελείται από τρία κουτιά στα οποία είναι σημειωμένες οι τιμές 1, 2 και 3, έναν μεταβλητό αριθμό λαστιχένινων σφαιρών (από 2 έως 4) και 1 ή 2 ζάρια (για διαβάθμιση του επιπέδου δυσκολίας).



Τα ζάρια καθορίζουν την τιμή που θα προκύψει τοποθετώντας τις μπάλες στα κουτιά. Η τιμή που παίρνει η μπάλα που τοποθετείται στο κουτί δίνεται από τον αριθμό που φέρει το κάθε κουτί.

Ο πρώτος μαθητής συνθέτει την αξία και ένας δεύτερος μαθητής προσπαθεί να κάνει το ίδιο, αλλά αλλάζει τη σύνθεση.

Παράδειγμα με 1 ζάρι και 2 μπάλες. Τιμή Ζαριών: 4.

Ο πρώτος παίκτης μπορεί να βάλει δύο μπάλες στο κουτί που φέρει τον αριθμό 2 ($2 \times 2 = 4$) και ο άλλος μπορεί να βάλει μια μπάλα στα κουτιά 1 και 3 ($1 + 3 = 4$). Με αυτόν τον τρόπο ο καθένας σκοράρει έναν πόντο.

Θα μπορούσαμε ν' αυξήσουμε την πιθανότητα συνθέσεων παρέχοντας μια τρίτη μπάλα.

Θα μπορούσαμε επίσης να εισαγάγουμε κανόνες σύμφωνα με τους οποίους το σκορ που λαμβάνεται είναι ίσο με τον αριθμό των μπαλών που χρησιμοποιούνται.

Περαιτέρω και ενδιαφέρουσες παραλλαγές μπορούν να εισαχθούν μεταβάλλοντας την ένδειξη των κουτιών (1, 2 και 4, ως προσέγγιση στο δυαδικό σύστημα) ή εισάγοντας ένα κουτί με την ένδειξη 0 (ουδέτερο στοιχείο του αθροίσματος) και απαιτώντας τη χρήση όλων των μπαλών.

Όπως έχει προαναφερθεί, η δραστηριότητα απαιτεί ορισμένη γνώση, όσο βασικού επιπέδου κι αν αυτή είναι, των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Όταν βρεθήκαμε αντιμέτωποι με την πρόκληση του να καταφέρουμε να προσαρμόσουμε τη δραστηριότητα σε μια ηλικιακή ομάδα μαθητών η οποία είναι εξοικειωμένη με λιγότερα εργαλεία υπολογισμού, η χρήση των καθρεφτών μας επέτρεψε να κάνουμε ένα βήμα πίσω όσον αφορά τον τομέα των δεξιοτήτων και να μετατρέψουμε την ανάγκη για διεξαγωγή υπολογισμού σε απλή καταμέτρηση: 1 καθρέφτης = 1 αντικείμενο + 1 εικόνα = πολλαπλασιασμός επί 2, 2 καθρέφτες στις 120° = 1 αντικείμενο + 2 εικόνες = πολλαπλασιασμός επί 3, 2 καθρέφτες στις 90° = 1 αντικείμενο + 3 εικόνες = πολλαπλασιασμός επί 4!

Μπορεί να μην είναι εύκολο για όλους ν' αποδεχτούν ότι η εικόνα είναι τόσο πολύτιμη όσο το ίδιο το αντικείμενο. Βασιζόμαστε στην εξαιρετική ευελιξία της φαντασίας των παιδιών ώστε να γίνει μια πλήρης αποδοχή των κανόνων.

Πιστεύουμε ότι μια εικονική έκδοση της ενότητας, όπου όλα τα αντικείμενα που εμφανίζονται στην οθόνη, τόσο αυτά που εισάγετε, καθώς κι αυτά που εμφανίζονται, έχουν την ίδια εικονικότητα, είναι ακόμη πιο εύκολο να γίνει αποδεκτή, εξασκώντας, τουλάχιστον εν μέρει, τις ίδιες ικανότητες.

Σχεδίαση Ζαριών

Η αρχική ιδέα προήλθε από ένα παιδικό παιχνίδι, στο οποίο στόχος είναι η αναπαραγωγή των προσώπων που είναι τυπωμένα σε μερικές κάρτες.



Αντλώντας από το παιχνίδι αυτό, σκεφτήκαμε να κάνουμε το ίδιο αλλά με γεωμετρικά σχήματα, εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία των σχημάτων και των κύβων. Έτσι, φτιάξαμε 4 ξύλινα ζάρια με κάποια σχήματα σχεδιασμένα με μαύρο χρώμα σε κάθε πλευρά. Όλα τα ζάρια είναι ίσα σε μέγεθος και περιέχουν τα ίδια 6 πρόσωπα.

Μπορούν να αναπαραχθούν από τους μαθητές χρησιμοποιώντας χαρτί οριγκάμι ή χαρτόνι με κόλλα για να φτιάξουν τα ζάρια και στη συνέχεια να ζωγραφίσουν τις πλευρές. Φυσικά, μπορούν να σχεδιαστούν κι άλλου είδους σχέδια σε κάθε πλευρά για να δημιουργηθούν νέα σχήματα, αλλά αυτά έχουν επιλεγεί επειδή είναι εύκολα κατανοητά (όλα περιλαμβάνουν κάποιες γωνίες) και κατάλληλα για εκπαιδευτικές δραστηριότητες.



Προφανώς, το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνετε όταν έχετε αυτούς τους κύβους στα χέρια σας είναι να εξερευνήσετε με παιγνιώδη τρόπο ποια σχήματα μπορούν να δημιουργηθούν μ' αυτά: ένας κύκλος, δύο διαφορετικά τρίγωνα, δύο διαφορετικά τετράγωνα, ένα τετράγωνο αστέρι, ένα χωνάκι παγωτού κ.λπ. Οι μαθητές καλούνται να περιστρέψουν τους κύβους και να παίξουν με τη συμμετρία τους για να φτιάξουν αυτά τα σχήματα και σύντομα θα ανακαλύψουν ότι υπάρχουν μόνο δύο πρόσωπα τα οποία είναι ασύμμετρα, γεγονός που απαιτεί να τα χρησιμοποιήσουν σε ζεύγη για να σχηματίσουν ένα ολικά συμμετρικό σχήμα. Μετά από αυτήν την αρχική εξερεύνηση, μπορούν να προταθούν ορισμένες καθοδηγούμενες δραστηριότητες:

- Σχηματισμός όλων των πιθανών πολυγωνικών σχημάτων που διαθέτουν 3 ή 4 πλευρές
- Σχηματισμός όλων των πιθανών συμμετρικών σχημάτων (πόσα συμμετρικά σχήματα υπάρχουν, αν συμπεριλάβετε αυτά με περιστροφική συμμετρία!)
- Ταξινόμηση μερικών από αυτά τα σχήματα ανά μέγεθος εμβαδού (χωρίς να το υπολογίσετε!)

Αφού περάσετε από το πρώτο βήμα της εξερεύνησης και του παιχνιδιού, μπορείτε στη συνέχεια να προτείνετε διαφορετικές δραστηριότητες για την τάξη, καθοδηγώντας τους μαθητές με τις κατάλληλες ερωτήσεις, ώστε να μπορούν να οδηγηθούν στις απαντήσεις:

- Ποιο είναι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου σχήματος; Πώς μπορείτε να το υπολογίσετε;
- Ποια είναι η περίμετρος του σχήματος και πώς μπορείτε να την υπολογίσετε;
- Συγκρίνετε την περίμετρο και το εμβαδόν των ανάλογων σχημάτων.

- Δημιουργήστε νέα σχήματα και υπολογίστε το εμβαδόν και την περίμετρό τους.

Προφανώς, είναι πολύ σημαντικό να μελετηθούν οι εγγενείς ιδιότητες των σχημάτων και να χρησιμοποιηθεί η έννοια της συμμετρίας για τον υπολογισμό εμβαδών και περιμέτρων (χωρίς την ανάγκη χρήσης τύπων, το οποίο είναι και το πιο ενδιαφέρον στοιχείο του εκθέματος). Το γεγονός αυτό αναπτύσσει τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών.

Ως επιπλέον δραστηριότητα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να εφεύρουν τα δικά τους ζάρια, να σχεδιάσουν τα σχήματα κάθε προσώπου και να σχεδιάσουν το δικό τους σετ ζαριών, χρησιμοποιώντας οριγκάμι ή έναν τρισδιάστατο εκτυπωτή.

Φτιάξε μου Φτερά

Όπως και με άλλα εκθέματα, το έκθεμα αυτό επίσης συνδυάζει τη δημιουργικότητα και την επίλυση προβλημάτων.



Το πρώτο βήμα είναι να αναπαραχθεί σε μια σιλουέτα ενός φτερού πεταλούδας η σύνθεση των στοιχειωδών σχημάτων (Pattern Blocks) που είναι σχεδιασμένα στο άλλο φτερό.

Περιλαμβάνει την αναγνώριση των σχημάτων των κομματιών (τρίγωνα, τετράγωνα, ρόμβοι, τραπεζοειδή και εξάγωνα) και την τοποθέτησή τους με τρόπο συμμετρικό στο κενό σχήμα.

Η πρόκληση δεν είναι τόσο προφανής, ειδικά για τα παιδιά μικρής ηλικίας.

Το δεύτερο μέρος της δραστηριότητας είναι η σύνθεση και των δύο φτερών στα σχήματα που είναι προετοιμασμένα.

Θα μπορούσατε να προσφέρετε τα απολύτως απαραίτητα κομμάτια στους μαθητές, κατευθύνοντάς τους, χωρίς όμως να τους επιβάλλετε, την κατασκευή συμμετρικών φτερών.

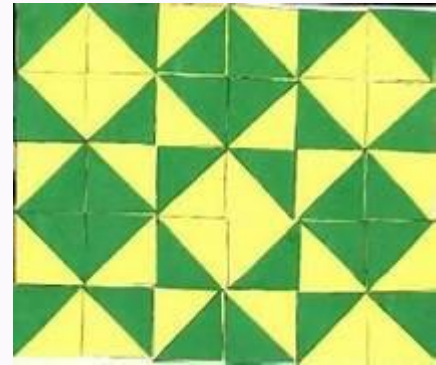
Αντ' αυτού, μπορείτε να παρέχετε στους μαθητές περισσότερα κομμάτια και να τους προσφέρετε μεγαλύτερο βαθμό ελευθερίας στο σχεδιασμό των φτερών.

Το ενδιαφέρον στοιχείο της δραστηριότητας είναι ότι είναι εύκολα προσαρμόσιμη, ενώ μπορεί επίσης να πάρει τον κατάλληλο προσανατολισμό έτσι ώστε κάθε μαθητής να σχεδιάζει τα φτερά της πεταλούδας του.

Παραδείγματα δραστηριοτήτων με τη χρήση του ίδιου υλικού

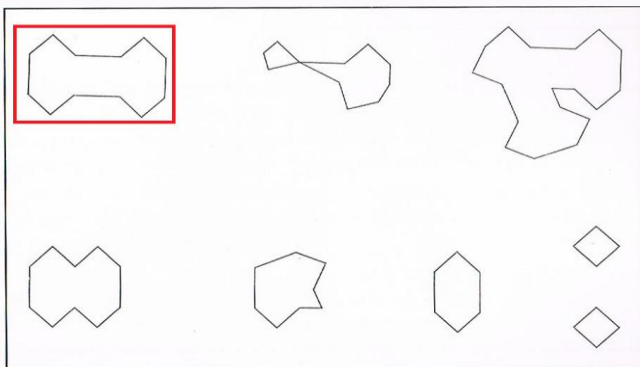
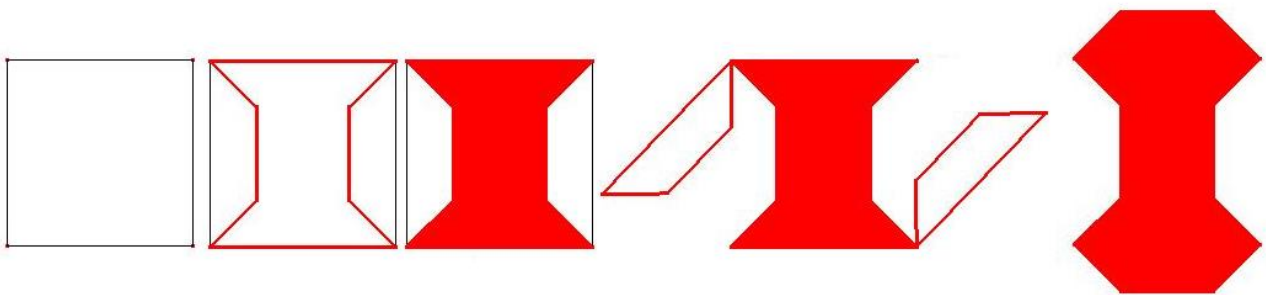
Σε αυτό το κεφάλαιο, θα διερευνήσουμε διάφορα παραδείγματα πρόσθετων δραστηριοτήτων που μπορούν να γίνουν χρησιμοποιώντας το ίδιο εκπαιδευτικό υλικό.

Μερικά ψηφιδωτά είναι εύκολο να κατασκευαστούν, για παράδειγμα το κλασικό δίχρωμο πλακίδιο, του οποίου οι διαφορετικοί συνδυασμοί μπορούν να δώσουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα με τη χρήση ενός καθρέφτη, ή πολύ αισθητικά αποτελέσματα, εάν το πλακίδιο τοποθετηθεί ανάμεσα σε δύο παράλληλους καθρέφτες.



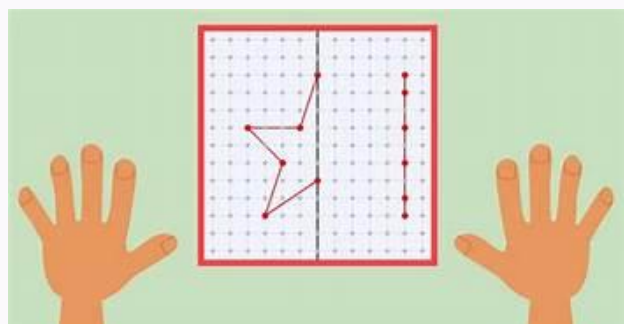
Το κινεζικό τάνγκραμ επιτρέπει επίσης εξερευνήσεις στην έννοια της συμμετρίας.

Η κατασκευή του Nasrid Bone είναι ενδιαφέρουσα, μια προϋπόθεση για άλλες παραλλαγές του θέματος, ξεκινώντας από κανονικά ή ημι-κανονικά σχήματα τα οποία ψηφιοθετούν το επίπεδο.



Ξεκινώντας από το Nasrid Bone και χρησιμοποιώντας έναν καθρέφτη, μπορεί να προσφερθεί αυτή η απλή αλλά ενδιαφέρουσα δραστηριότητα (από τον Rafael Pérez), η οποία συνδυάζει τη δημιουργικότητα και την αναγνώριση συμμετριών.

Πολλές εκπαιδευτικές δραστηριότητες για την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων είναι επίσης εφαρμόσιμες χρησιμοποιώντας το Geoboard.



Συμπέρασμα

Πιστεύουμε ότι οι δραστηριότητες που σχετίζονται με τη συμμετρία αποτελούν ένα καλό παράδειγμα για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι δεν υπάρχουν μικρά μαθηματικά ή μικροί μαθηματικοί. Δηλαδή, ότι οι καλές δραστηριότητες που έχουν σχεδιαστεί για νεαρότερους χρήστες

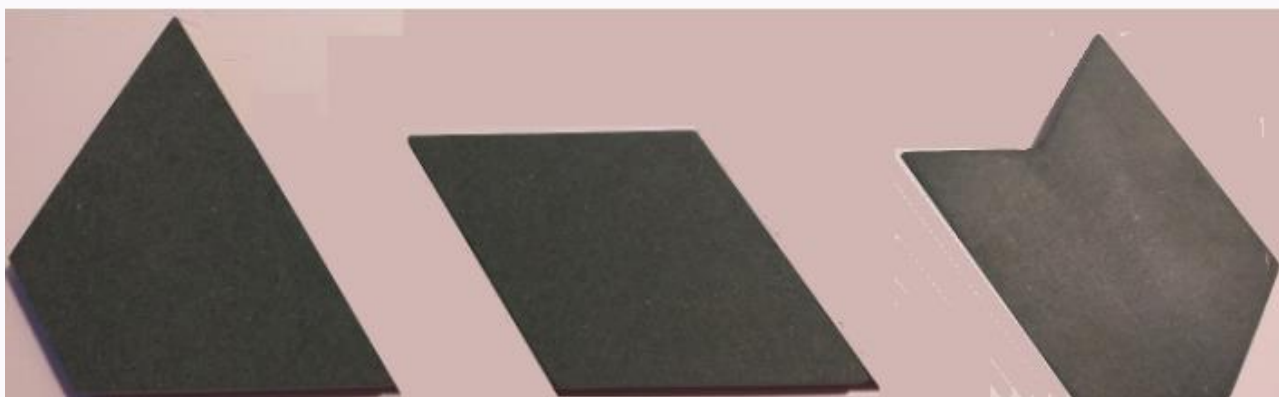
περιέχουν τα θεμελιώδη στοιχεία της μαθηματικής σκέψης και μπορούν να τονιστούν προκειμένου να αποκτήσουν σημασία ακόμη και για χρήστες μεγαλύτερης ηλικίας και υψηλότερων επιπέδων δεξιοτήτων.

Πρόκειται για μια συζήτηση η οποία ξεκίνησε πριν από μερικά χρόνια, σε μια έκδοση του Matrix Conference και στην οποία συμμετείχαν πολλοί από τους εταίρους του έργου SMEM, η οποία μας επέτρεψε να προχωρήσουμε στη σύγκριση των προτάσεων και των εμπειριών μας. Αυτό το νέο πλαίσιο εμπλουτίζει το εύρος των όσων έχουμε να προσφέρουμε στον τομέα της εκπαίδευσης, και οι οποίες προτάσεις θα παρουσιαστούν κατά τους επόμενους μήνες στους εκπαιδευτικούς στον τομέα επιρροής κάθε εταίρου.

Πιστεύουμε ότι η ακόλουθη εκπαιδευτική εμπειρία παρουσιάζει όλα αυτά τα στοιχεία: στοχευμένο και ενθαρρυντικό πλαίσιο και γλώσσα, αναλογική και αναλυτική προσέγγιση, διαφορετικοί βαθμοί δυσκολίας, χρήση στρατηγικών, κίνητρα για ενθάρρυνση της δημιουργικότητας και απόκτηση διαφορετικών δεξιοτήτων.

Πρέπει να πούμε ότι η επαφή με το παρόν υλικό έγινε με τρόπο χαλαρό, αλλά σύντομα έδειξε τη δυνατότητα προσαρμογής και στις δύο ομάδες των χρηστών-στόχους μας: τόσο τα παιδιά ηλικίας 3 έως 8 ετών όσο και τους δασκάλους τους.

Η αρχική πρόταση, ένα παζλ συμμετρίας που ονομάζεται *Baikonur*, από τον Alexander Magyarics, είχε ως στόχο να ενωθούν τα τρία κομμάτια⁵ για να σχηματίσουν ένα ενιαίο σχήμα που να διαθέτει άξονα συμμετρίας.



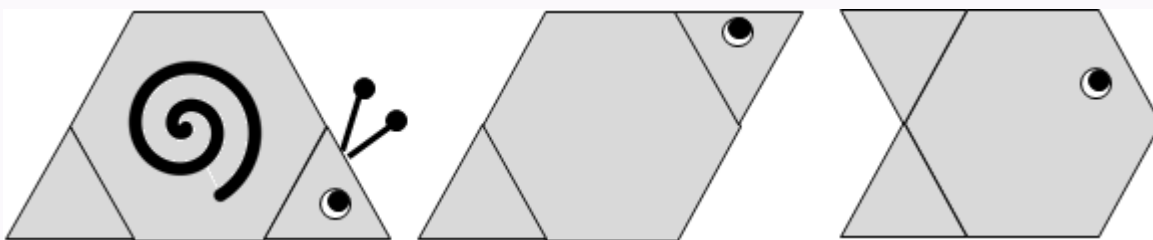
Προφανώς, η ολοκλήρωση της πρόκλησης είναι πολύ δύσκολη για τους χρήστες μας, αλλά τα σχήματα είναι ενδεικτικά και είναι δυνατόν να ξεκινήσουμε με απλούστερες δραστηριότητες.

Η νέα περιπέτεια της Έμου με την έννοια της συμμετρίας (περιλαμβάνει εργασίες)

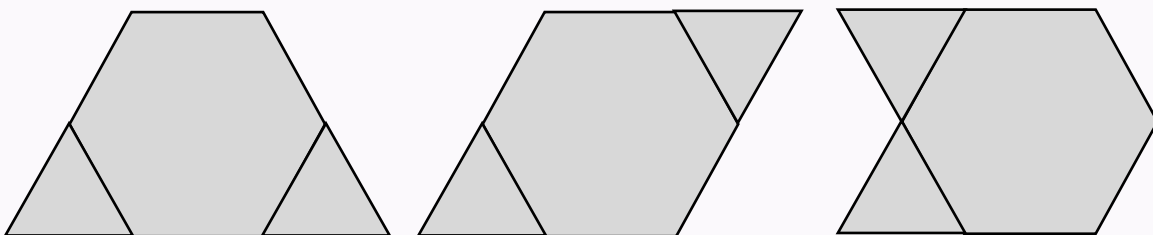
Η Έμου θέλει να επισκεφτεί τη φίλη της, τη Χάιντι τη Φάλαινα.

Οι φίλοι της ανυπομονούν να τη βοηθήσουν – να συναντήσουν τον Σαμ το σαλιγκάρι, τη Μαρία τη Μαρμότα και τον Φρανσουά το ψάρι.

⁵ Μια ενδιαφέρουσα πτυχή αυτού του παζλ, η οποία μπορεί να συζητηθεί με τους μαθητές, είναι ότι αντιπροσωπεύει τους τρεις τρόπους με τους οποίους δύο κανονικά τρίγωνα μπορούν να τοποθετηθούν στις πλευρές ενός κανονικού εξαγώνου.



Εργασία 1: Βρείτε τον άξονα συμμετρίας κάθε σχήματος. (Ένας καθρέφτης μπορεί να βοηθήσει στην περίπτωση αυτή.)



Οι τρεις φίλοι σχηματίζουν τρία ζευγάρια για να συνεργαστούν, σε διαφορετικές ημέρες, για να βρουν τον τρόπο να κάνουν την Έμου να ταξιδέψει για να συναντήσει τη Χάιντι στη θάλασσα.

Ο Σαμ και η Μαρία σχεδιάζουν ένα καράβι, αλλά είναι πολύ εύθραυστο.

Ο Σαμ και ο Φρανσουά σχεδιάζουν ένα κανό, αλλά είναι πολύ μικρό.

Η Μαρία και ο Φρανσουά προτείνουν έναν πύραυλο, αλλά κάνει πολύ θόρυβο.

Εργασία 2: Για να βρείτε την αξονική συμμετρία των σχημάτων που λαμβάνονται ενώνοντας τα τρία κομμάτια των δύο σε δύο (πρέπει πάντα να έχουν τουλάχιστον μία πλευρά (ή μέρος αυτής) κοινή).

Έτσι, αποφασίζουν να εκτελέσουν και τις τρεις εργασίες μαζί.

Αποφασίζουν να κατασκευάσουν ένα καράβι για να μπορέσουν να φτάσουν στη Χάιντι, η οποία βρίσκεται μέσα στη θάλασσα.

Αλλά ακόμα κι αν ο Φρανσουά, το Ψάρι, γνωρίζει τα μυστικά του υγρού περιβάλλοντος, οι δύο φίλοι δεν είναι εξειδικευμένοι ναυπηγοί, κι έτσι στο κανό δημιουργείται μία διαρροή!

Ακόμα κι αν η τρύπα δεν είναι στο κάτω μέρος του καραβιού, ξέρουν ότι τα κύματα θα έχουν ως αποτέλεσμα το καράβι να γεμίσει με νερό και θα βυθιστεί!

Πρόκληση 3.1 Συνδυάζοντας τα τρία σχήματα, κατασκευάστε το περίγραμμα ενός καραβιού, το οποίο να είναι συμμετρικό, ακολουθώντας τους κανόνες (μία πλευρά ή μέρος αυτής να είναι κοινή).

Συνειδητοποιώντας τις κακές τους ικανότητες στη ναυπηγία, οι φίλοι αποφασίζουν να κατασκευάσουν ένα απλούστερο σκάφος.

«Τι λες να φτιάξουμε ένα κανό;», προτείνει ο Σαμ.

«Ναι, αλλά να είναι μεγαλύτερο από αυτό που σχεδίασες εσύ και ο Φρανσουά», απάντησε η Μαρία.

Έτσι, τα κατάφεραν.

Πρόκληση 3.2 Συνδυάζοντας τα τρία σχήματα, κατασκευάστε το περίγραμμα ενός κανό, το οποίο να είναι συμμετρικό, ακολουθώντας τους κανόνες (μία πλευρά ή μέρος αυτής να είναι κοινή).

Και... ήταν πλέον έτοιμοι να το παρουσιάσουν στην Έμυ.

Μα... πού είναι η Έμυ;

Πρόκληση 3.1 Συνδυάζοντας τα τρία σχήματα, κατασκευάστε τη σιλουέτα της Έμυ, έτσι ώστε να είναι συμμετρική, ακολουθώντας τους κανόνες, όπως το λογότυπο του έργου SMEM (όμως να περιλαμβάνει μόνο ένα κενό τρίγωνο).

Κι έτσι η Έμυ κατάφερε να διασχίσει τη θάλασσα και να βρει τη Χάιντι.



Συναρμολόγηση σχημάτων

Ορισμός της Συναρμολόγησης Σχημάτων

Η διαδικασία της συναρμολόγησης σχημάτων για το πλαίσιο του νηπιαγωγείου είναι μια διασκεδαστική και εκπαιδευτική δραστηριότητα που επιτρέπει στα μικρά παιδιά να αναπτύξουν την κατανόησή τους όσον αφορά τα σχήματα, τη βασική γεωμετρία και τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων.

Ακολουθούν μερικές ιδέες για δραστηριότητες συναρμολόγησης γεωμετρικών σχημάτων για μαθητές νηπιαγωγείου:

- Παζλ με σχήματα: Δώστε στους μαθητές απλά παζλ με κομμάτια σε διάφορα γεωμετρικά σχήματα. Τα παιδιά θα πρέπει να ταιριάξουν τα κομμάτια για να σχηματίσουν μια εικόνα ή ένα πλήρες σχήμα.



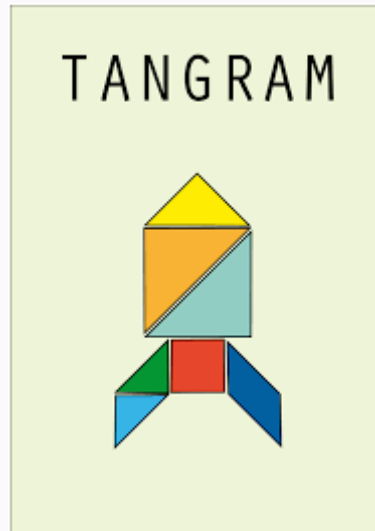
Le Kéor - Crédits Fermat Science

- Χτίζοντας με Τουβλάκια: Χρησιμοποιήστε τουβλάκια διαφορετικών σχημάτων (τετράγωνα, τρίγωνα, κύκλους κ.λπ.) και ενθαρρύνετε τα παιδιά να δημιουργήσουν κατασκευές χρησιμοποιώντας αυτά τα σχήματα.



Fractionary - Crédits Fermat Science

- Κολλάζ Σχημάτων: Δώστε στα παιδιά κομμάτια χαρτιού σε διάφορα σχήματα (κύκλους, τετράγωνα, ορθογώνια, τρίγωνα) και διαφορετικά χρώματα. Μπορούν να δημιουργήσουν εικόνες ή μοτίβα κολλώντας αυτά τα σχήματα σε ένα φύλλο χαρτιού.
- Παιχνίδια Τάνγκραμ: Τα Τάνγκραμ είναι γρίφοι που αποτελούνται από επτά διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Τα παιδιά μπορούν να τα χειριστούν προκειμένου να σχηματίσουν διάφορες φιγούρες και να αναπτύξουν την κατανόησή τους για τα σχήματα.



Τάνγκραμ - Crédits OpenClipart

- Δημιουργία Χαρακτήρων: Ενθαρρύνετε τα παιδιά να δημιουργήσουν χαρακτήρες χρησιμοποιώντας γεωμετρικά σχήματα για το σώμα, τα μάτια, τη μύτη κ.λπ. Μπορούν στη συνέχεια να επινοήσουν ιστορίες για τις δημιουργίες τους.
- Κυνήγι Σχημάτων: Κατά τη διάρκεια μιας υπαίθριας βόλτας, ζητήστε από τα παιδιά να εντοπίσουν αντικείμενα με συγκεκριμένα σχήματα, όπως κύκλους (ρόδες αυτοκινήτου), ορθογώνια (παράθυρα σπιτιού) κ.λπ.



Matemaths - Crédits Fermat Science

- Σχήματα στη Φύση: Εξερευνήστε τη φύση με τους μαθητές και αναζητήστε παραδείγματα γεωμετρικών σχημάτων στον κόσμο γύρω τους, όπως τριγωνικά φύλλα ή στρογγυλά βράχια.

Αυτές οι δραστηριότητες επιτρέπουν στα παιδιά να διασκεδάζουν αναπτύσσοντας παράλληλα την κατανόησή τους για τα σχήματα και τη γεωμετρία, η οποία αποτελεί τη βάση για τη μελλοντική τους μαθηματική εκπαίδευση.

Σύνδεση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η έννοια της προσαρμογής των σχημάτων διαδραματίζει θεμελιώδη ρόλο στο αναλυτικό πρόγραμμα των σχολείων όσον αφορά τον πρώτο κύκλο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτός ο κύκλος, στον οποίο εμπίπτουν τα παιδιά ηλικίας 3 έως 6 ετών, είναι μια κρίσιμη περίοδος γνωστικής ανάπτυξης και προετοιμασίας για μια πιο τυπική μαθηματική εκπαίδευση. Η εξερεύνηση και ο χειρισμός γεωμετρικών σχημάτων κατά τα πρώτα χρόνια της ζωής ενός παιδιού είναι απαραίτητα, προκειμένου να τεθούν οι βάσεις για τη μελλοντική μαθηματική τους κατανόηση.

Πρώτον, αυτοί οι μαθητές ενθαρρύνονται να χειρίζονται και να εξερευνούν διάφορα γεωμετρικά σχήματα με συγκεκριμένο τρόπο. Μαθαίνουν ν' αναγνωρίζουν αυτά τα σχήματα στο καθημερινό τους περιβάλλον είτε μέσω παιχνιδιών, αντικειμένων ή ακόμα και αρχιτεκτονικών στοιχείων. Αυτό το αρχικό βήμα εξοικειώνει τους μαθητές νεαρής ηλικίας με βασικά σχήματα όπως κύκλους, τετράγωνα, τρίγωνα και ορθογώνια.

Στη συνέχεια, μαθαίνουν να ονομάζουν αυτά τα σχήματα, γεγονός που ενισχύει το μαθηματικό τους λεξιλόγιο. Αποκτούν επίσης δεξιότητες στη διαφοροποίηση των ιδιοτήτων των σχημάτων, όπως η αναγνώριση ίσων πλευρών σε ένα τετράγωνο ή ορθών γωνιών σε ένα ορθογώνιο. Αυτό αποτελεί ζωτικό βήμα για την ανάπτυξη της ικανότητάς τους να επικοινωνούν και να περιγράφουν τα σχήματα με ακρίβεια.

Η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί βασική παιδαγωγική δραστηριότητα. Οι μαθητές αρχίζουν να δημιουργούν συνθέσεις χρησιμοποιώντας αυτά τα βασικά σχήματα, τα οποία αναπτύσσουν τη χωρική τους σκέψη και τη δημιουργικότητά τους. Τους προετοιμάζει επίσης για μεταγενέστερη κατανόηση πιο προηγμένων εννοιών όπως η συμμετρία και η ευθυγράμμιση, ενώ παράλληλα μπορεί να λειτουργήσει ακόμη και ως μια εισαγωγή στα τρισδιάστατα στερεά.

Συνοπτικά, η έννοια της προσαρμογής σχημάτων στο πρόγραμμα σπουδών για τον πρώτο κύκλο της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί κρίσιμο βήμα ώστε να τεθούν ισχυρά θεμέλια στη γεωμετρία και την προετοιμασία των μαθητών για πιο προηγμένες μαθηματικές έννοιες καθώς διανύουν το εκπαιδευτικό τους ταξίδι. Προωθεί επίσης την ανάπτυξη του μαθηματικού τους λεξιλογίου, της χωρικής σκέψης και της δημιουργικότητάς τους, παρέχοντας παράλληλα στους νεαρούς μαθητές μια θετική αρχική εμπειρία με τα μαθηματικά.

Για την έναρξη του επόμενου κύκλου της μαθηματικής τους εκπαίδευσης (ηλικίες 6 έως 8 ετών), οι μαθητές συνεχίζουν τη μαθηματική τους μάθηση εδραιώνοντας τις σταθερές βάσεις που αποκτήθηκαν κατά τον πρώτο κύκλο. Αυτή η αρχική φάση του δεύτερου κύκλου χαρακτηρίζεται από μια βαθύτερη εξερεύνηση των γεωμετρικών σχημάτων. Οι μαθητές, οι οποίοι είναι πλέον πιο εξοικειωμένοι με τα τετράγωνα, τα ορθογώνια και τα τρίγωνα, μπορούν να προχωρήσουν περαιτέρω. Αρχίζουν να δημιουργούν πιο σύνθετα σχήματα χρησιμοποιώντας αυτά τα βασικά σχήματα ως κομμάτια ενός μαθηματικού παζλ.

Μια νέα διάσταση ανοίγεται επίσης στους μαθητές με την εισαγωγή τρισδιάστατων σχημάτων, τα οποία ονομάζονται γεωμετρικά στερεά. Οι μαθητές μαθαίνουν να δημιουργούν κύβους, κυλίνδρους, πρίσματα και άλλα στερεά για να παράγουν συναρπαστικές τρισδιάστατες κατασκευές. Αυτό δεν τους βοηθά μόνο να κατανοήσουν τα ίδια τα στερεά, αλλά και ν' αναπτύξουν τις χωρικές δεξιότητές τους, οπτικοποιώντας τον τρόπο με τον οποίο τα σχήματα αυτά συνδυάζονται μεταξύ τους για να δημιουργήσουν πιο σύνθετα αντικείμενα.

Η συναρμολόγηση γεωμετρικών σχημάτων πάει πέρα από τον απλό χειρισμό μεμονωμένων τεμαχίων. Χρησιμεύει επίσης ως μαθησιακό έδαφος για διδασκαλία των εννοιών της συμμετρίας και της ευθυγράμμισης, οι οποίες αποτελούν βασικές γεωμετρικές έννοιες. Οι μαθητές συνεχίζουν

να διερευνούν και να εντοπίζουν γεωμετρικές σχέσεις, ενισχύοντας έτσι την κατανόησή τους για τη συμμετρία και την ευθυγράμμιση σε συγκεκριμένα πλαίσια.

Τέλος, η συναρμολόγηση γεωμετρικών σχημάτων συνδέεται φυσικά με άλλες μαθηματικές δεξιότητες. Οι μαθητές αρχίζουν να κατανοούν τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού κατά την ενασχόλησή τους με επίπεδα σχήματα, ενισχύοντας τη συνολική τους κατανόηση όσον αφορά τα μαθηματικά και την ικανότητά τους να επιλύουν προβλήματα με τρόπο ολιστικό.

Εκθέματα του έργου SMEM που σχετίζονται με αυτή την έννοια

Η χρήση μαθηματικών εκθεσιακών ενοτήτων που εξερευνούν τη συναρμολόγηση σχημάτων είναι μια συναρπαστική ευκαιρία να αφυπνιστεί η περιέργεια των μαθητών και να εμβυθιστούν στον συναρπαστικό κόσμο των μαθηματικών. Τα εκθέματα αυτά έχουν ως στόχο να εισαγάγουν τους μαθητές, από τα πρώτα κιόλας χρόνια της εκπαιδευτικής τους πορείας, σε μια σειρά βασικών εννοιών και δεξιοτήτων που σχετίζονται με τη γεωμετρία και τη χωρική σκέψη.

Ακολουθεί μια λίστα με 11 εκπαιδευτικές ενότητες ανοικτού κώδικα που μπορείτε να βρείτε στα πλαίσια του έργου SMEM:

Ενότητα 1 Το πρόβλημα του δάσους

Ενότητα 2 Κερασόπιτες

Ενότητα 3 Οι 9 Αλεπούδες

Ενότητα 4 Το Φράγμα του Κάστορα

Ενότητα 5 Κύβοι

Ενότητα 6 Σχεδίαση ζαριών

Ενότητα 7 Τα σπίτια των ζώων

Ενότητα 8 Χτίζοντας γέφυρες

Ενότητα 9 Χρωματιστά Φτερά

Ενότητα 10 Φτιάξε μου Φτερά

Ενότητα 11 Χαρούμενοι Γείτονες

Μερικές πιθανές συνδέσεις μεταξύ των εκθεμάτων

Παράδειγμα 1: Αναπαραγωγή σχήματος

Προτείνουμε τον σχεδιασμό μιας ενδιαφέρουσας παιδαγωγικής ακολουθίας επικεντρωμένης στη θεματική «Αναπαραγωγή Σχήματος» συνδυάζοντας ορισμένες από αυτές τις ενότητες της έκθεσης. Για το σκοπό αυτό, θα βασιστούμε στα τρία ακόλουθα εκθέματα: «Σχεδίαση Ζαριών», «Φτιάξε μου Φτερά» και «Χρωματιστά Φτερά». Αυτές οι ενότητες προσφέρουν μια ενδιαφέρουσα προοπτική για τη διαδικασία αναπαραγωγής σχημάτων. Κατά τη διάρκεια αυτής της ακολουθίας, οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να εξερευνήσουν τις έννοιες της συμμετρίας, των μοτίβων και της επανάληψης, αναπτύσσοντας παράλληλα τις δεξιότητες παρατήρησης και δημιουργικότητάς τους. Ενθαρρύνοντάς τους να δημιουργήσουν τα δικά τους έργα εμπνευσμένα από αυτά τα εκθέματα, προωθούμε την ατομική έκφραση, ενώ παράλληλα διερευνούμε θεμελιώδεις έννοιες που σχετίζονται με την αναπαραγωγή σχημάτων.

Παράδειγμα 2: Κατασκευή/ Χωρική Αντίληψη

Τώρα, ας σχεδιάσουμε μια παιδαγωγική ακολουθία επικεντρωμένη στη θεματική «Κατασκευή/Χωρική Αντίληψη». Για τον σκοπό αυτό, μπορούμε να βασιστούμε στις ακόλουθες

ενότητες εκθεμάτων: «Το Φράγμα του Κάστορα», «Κύβοι», «Τα Σπίτια των Ζώων» και «Χτίζοντας Γέφυρες». Αυτά τα εκθέματα προσφέρουν μια πολυδιάστατη προσέγγιση για τη διερεύνηση της κατασκευής και της χωρικής αντίληψης. Κατά τη διάρκεια αυτής της ακολουθίας, οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία ν' αναπτύξουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων, δεξιότητες γεωμετρίας, χωρικής κατανόησης και συνεργασίας.

Παράδειγμα 3: Μαθηματική Λογική

Το έργο αυτό προσφέρει μια μεγάλη ευκαιρία να σχεδιάσουμε μια ενδιαφέρουσα παιδαγωγική ακολουθία γύρω από το θέμα της «Μαθηματικής Λογικής», χρησιμοποιώντας πρωτότυπα εκθέματα όπως «Το Πρόβλημα του Δάσους», «Οι 9 Αλεπούδες» και «Χαρούμενοι Γείτονες». Αυτά τα εκθέματα προσφέρουν πλούσιες προοπτικές για την εξερεύνηση της μαθηματικής λογικής σε διάφορες μορφές. Κατά τη διάρκεια αυτής της ακολουθίας, οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν τη λογική τους σκέψη, τις δεξιότητές τους στην επίλυση προβλημάτων και τις μαθηματικές τους δεξιότητες καθώς διασκεδάζουν. Με την επίλυση μαθηματικών γρίφων στα πλαίσια του εκθέματος «Χαρούμενοι Γείτονες», την εξερεύνηση των μυστηρίων στο έκθεμα «Οι 9 Αλεπούδες» και την επίλυση του «Προβλήματος του Δάσους», οι μαθητές θα είναι σε θέση να εφαρμόσουν σύνθετες μαθηματικές έννοιες με συγκεκριμένο τρόπο.

Παράδειγμα 4: Σύνθεση Αριθμών

Τέλος, έχουμε την ευκαιρία να σχεδιάσουμε μια συναρπαστική παιδαγωγική ακολουθία γύρω από το θέμα της «σύνθεσης αριθμών», χρησιμοποιώντας το έκθεμα «Κερασόπιτες». Αυτό το έκθεμα προσφέρει μια οπτική και παιγνιώδη προσέγγιση για την εις βάθος διερεύνηση της σύνθεσης αριθμών.

Παραδείγματα δραστηριοτήτων με τη χρήση του ίδιου υλικού

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα διερευνήσουμε διάφορα παραδείγματα πρόσθετων δραστηριοτήτων που μπορούν να υλοποιηθούν χρησιμοποιώντας το ίδιο εκπαιδευτικό υλικό, δηλαδή τα γεωμετρικά σχήματα. Αυτές οι δραστηριότητες προσφέρουν μια ποικιλία ευκαιριών για την ενίσχυση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, ενώ παράλληλα συμβάλλουν στην ενίσχυση της συμμετοχής των μαθητών.

Sudoku με γεωμετρικά σχήματα

Το Sudoku με Γεωμετρικά σχήματα είναι μια δημιουργική έκδοση του παραδοσιακού Sudoku η οποία παρουσιάζει επιπλέον προκλήσεις. Αντί να χρησιμοποιούν αριθμούς, οι μαθητές χρησιμοποιούν γεωμετρικά σχήματα για να συμπληρώσουν το πλέγμα. Ο στόχος είναι να τοποθετήσετε κάθε σχήμα στο πλέγμα με τέτοιο τρόπο ώστε κανένα σχήμα να μην επαναλαμβάνεται στην ίδια γραμμή, την ίδια στήλη ή στο ίδιο μπλοκ. Αυτή η δραστηριότητα ενισχύει τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών, τη λογική τους, καθώς και την κατανόηση των σχημάτων. Τα παιδιά χρειάζεται επίσης ν' αναλύσουν τις χωρικές σχέσεις μεταξύ των σχημάτων για να επιτύχουν.

Τάνγκραμ: Εξερεύνηση Σχημάτων

Το Τάνγκραμ (Tangram) είναι ένα σύνολο επτά γεωμετρικών σχημάτων τα οποία μπορούν να συναρμολογηθούν για να δημιουργήσουν μια μεγάλη ποικιλία σχημάτων. Οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν τις ιδιότητες των κομματιών, να τα συγκρίνουν μεταξύ τους και να τα συνδυάσουν ώστε να δημιουργήσουν πολύπλοκα σχήματα. Αυτό ενθαρρύνει την κατανόηση των σχημάτων, των

γεωμετρικών μετασχηματισμών και των εννοιών της συμμετρίας. Αναπτύσσουν επίσης τη χωρική τους σκέψη, οπτικοποιώντας τον τρόπο με τον οποίο τα κομμάτια συναρμολογούνται για να σχηματίσουν διαφορετικά σχήματα.

Ψηφιοθέτηση: Επανάληψη Μοτίβου

Η δραστηριότητα της ψηφιοθέτησης περιλαμβάνει τη χρήση γεωμετρικών σχημάτων για τη δημιουργία επαναλαμβανόμενων μοτίβων σε μια επίπεδη επιφάνεια. Οι μαθητές μπορούν να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο τα σχήματα ταιριάζουν μεταξύ τους για να καλύψουν μια επιφάνεια χωρίς ν' αφήνουν κενά ή ν' αλληλεπικαλύπτονται. Αυτό ενισχύει την κατανόησή τους όσον αφορά τα μοτίβα, τους μετασχηματισμούς και τις έννοιες της ψηφιοθέτησης. Μπορούν να δημιουργήσουν καλλιτεχνικά μοτίβα ή σύνθετες ψηφιοθετήσεις μαθηματικού χαρακτήρα.

Ζωφόρος: Δημιουργία επαναλαμβανόμενων μοτίβων

Μια ζωφόρος είναι μια ακολουθία επαναλαμβανόμενων μοτίβων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διακόσμηση των περιγραμμάτων ή των επιφανειών. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικά σχήματα για να δημιουργήσουν ζωφόρους επαναλαμβάνοντας ένα μοτίβο ή μια ακολουθία μοτίβων. Αυτή η δραστηριότητα προάγει τη δημιουργικότητα και την κατανόηση των επαναλαμβανόμενων μοτίβων. Μπορούν επίσης να εξερευνήσουν έννοιες που αφορούν τη συμμετρία κατά τη διαδικασία δημιουργίας των ζωφόρων τους.

Ελεύθερη Κατασκευή

Το να επιτρέπεται στους μαθητές να εξερευνούν την ελεύθερη κατασκευή με γεωμετρικά σχήματα είναι ένας εξαιρετικός τρόπος για να τονωθεί η δημιουργικότητά τους και να ενισχυθεί η κατανόησή τους όσον αφορά τις γεωμετρικές έννοιες. Μπορούν να δημιουργήσουν μοτίβα, γλυπτά, κτίρια και πολλά άλλα χρησιμοποιώντας σχήματα ως δομικά στοιχεία. Αυτή η δραστηριότητα ενθαρρύνει τη χωρική σκέψη, τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών, καθώς και την ανακάλυψη γεωμετρικών ιδιοτήτων μέσω πρακτικής εμπειρίας. Οι μαθητές μπορούν επίσης να συνεργαστούν για να δημιουργήσουν μεγαλύτερες και πιο σύνθετες συνθέσεις, ενισχύοντας έτσι τις δεξιότητές τους στην επικοινωνία και την ομαδική εργασία.

Αυτά τα παραδείγματα πρόσθετων δραστηριοτήτων αναδεικνύουν την ευελιξία του εκπαιδευτικού υλικού το οποίο έχει ως βάση τα γεωμετρικά σχήματα. Ενσωματώνοντας αυτές τις δραστηριότητες στη διδασκαλία σας, μπορείτε να προσφέρετε στους μαθητές μια σειρά από συναρπαστικές μαθησιακές εμπειρίες οι οποίες ενισχύουν την κατανόησή τους όσον αφορά τις διάφορες μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται, διεγείροντας παράλληλα τη δημιουργικότητα και την κριτική τους σκέψη. Η χρήση συγκεκριμένου υλικού, όπως τα γεωμετρικά σχήματα, επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν τα μαθηματικά με πρακτικό και ελκυστικό τρόπο, γεγονός που ενισχύει τον ενθουσιασμό τους για την εκμάθηση των μαθηματικών.



Ελεύθερη κατασκευή - Crédits Fermat Science

Συμπέρασμα

Συμπερασματικά, η εφαρμογή σχημάτων στο νηπιαγωγείο είναι μια πολύτιμη εκπαιδευτική προσέγγιση για την ανάπτυξη των μικρών παιδιών. Αυτό το θέμα προσφέρει πολλές συναρπαστικές δραστηριότητες που προωθούν την κατανόηση των σχημάτων, τη χωρική σκέψη, τη δημιουργικότητα, τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και την προετοιμασία για την εκμάθηση πιο προηγμένων μαθηματικών εννοιών.

Τα παραδείγματα δραστηριοτήτων που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο καταδεικνύουν τον πλούτο και την ποικιλομορφία των μαθησιακών εμπειριών που μπορούν να προσφερθούν στους μαθητές που χρησιμοποιούν το παρόν εκπαιδευτικό υλικό, όπως, για παράδειγμα, τα γεωμετρικά σχήματα. Η ενσωμάτωση αυτής της θεματικής στο αναλυτικό πρόγραμμα των σχολείων ευθυγραμμίζεται απόλυτα με τους εκπαιδευτικούς στόχους της ανάπτυξης μαθηματικών δεξιοτήτων από τα πρώτα κιόλας χρόνια της επίσημης εκπαίδευσης.

Τα εκθέματα που προσφέρονται στο έργο ανοικτού κώδικα SMEM παρέχουν μια σταθερή βάση για τη δημιουργία συνεκτικών και εμπλουτισμένων παιδαγωγικών ακολουθιών. Αυτές οι ενότητες προωθούν την εξερεύνηση, την ανακάλυψη και την πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών, διεγείροντας παράλληλα την περιέργεια των μαθητών. Οι πιθανές συνδέσεις μεταξύ των εννοιών ανοίγουν την πόρτα σε μια διεπιστημονική προσέγγιση απέναντι στην μάθηση, κατά την οποία οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες αναπτύσσοντας παράλληλα δεξιότητες σε άλλους τομείς, όπως η επίλυση προβλημάτων, η κριτική σκέψη, η επικοινωνία και η δημιουργικότητα. Πρόσθετες συμπληρωματικές δραστηριότητες, όπως τα γεωμετρικά σχήματα Sudoku, Tangram, τα πλακίδια, η δημιουργία ζωφόρων και η ελεύθερη κατασκευή, παρέχουν ακόμη πλουσιότερες ευκαιρίες μάθησης.

Τέλος, η εισαγωγή σχημάτων στο νηπιαγωγείο δεν είναι απλώς μια διασκεδαστική δραστηριότητα. Είναι μια σταθερή βάση για την προετοιμασία των μαθητών για το μελλοντικό μαθηματικό τους ταξίδι. Προωθεί την οικοδόμηση γερών βάσεων όσον αφορά τις μαθηματικές τους γνώσεις, ενώ ταυτόχρονα πυροδοτεί ένα πάθος για τα μαθηματικά ανάμεσα στους νεαρούς μαθητές. Αυτή η

Θεματική συμβάλλει στη δημιουργία ενός διεγερτικού και ικανοποιητικού εκπαιδευτικού περιβάλλοντος όπου οι μαθητές μπορούν να ενισχύσουν την κατανόησή τους για τον κόσμο γύρω τους μέσω του φακού των μαθηματικών. Επενδύοντας σε αυτή την καινοτόμο παιδαγωγική προσέγγιση, συμβάλλουμε στη διαμόρφωση μιας νέας γενιάς ικανών μαθητών οι οποίοι έχουν πάθος για τα μαθηματικά, και οι οποίοι είναι έτοιμοι ν' αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις του αύριο.

Παρατήρηση και καταμέτρηση

Οι μαθηματικές έννοιες της παρατήρησης και της καταμέτρησης για μικρά παιδιά

Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα που μας περιβάλλει, από τα πρώτα κιόλας στάδια της ζωής μας. Το γεγονός αυτό έρχεται σε άμεση αντίθεση με την κοινή πεποίθηση ότι ένα άτομο γεννιέται με ή χωρίς ταλέντο στα μαθηματικά. Τα μαθηματικά είναι μια σημαντική δεξιότητα ζωής που μπορεί να αποκτηθεί και να τελειοποιηθεί μέσω της μάθησης, καταρρίπτοντας έτσι την ιδέα ότι κάποιος χρειάζεται έμφυτο ταλέντο για να διαπρέψει σ' αυτόν τον τομέα. Κάθε άτομο έχει τη δυνατότητα να κατανοήσει μαθηματικές έννοιες και να αναπτύξει επάρκεια, ανεξάρτητα από την αρχική μαθηματική του ικανότητα. Το κλειδί βρίσκεται στις προσαρμοσμένες και εξατομικευμένες προσεγγίσεις στη μάθηση, ευθυγραμμίζοντας τη διδασκαλία με τα ατομικά ενδιαφέροντα και τα τρέχοντα επίπεδα γνώσης του κάθε ατόμου. Αναγνωρίζοντας ότι τα μαθηματικά είναι μια δεξιότητα η οποία διδάσκεται, ενδυναμώνουμε τους μαθητές να αγκαλιάσουν το μάθημα αυτό με αυτοπεποίθηση, προωθώντας έτσι μια νοοτροπία ανάπτυξης που ενθαρρύνει την εξερεύνηση, την περιέργεια και τη συνεχή βελτίωση. Αυτή η συμπεριληπτική προσέγγιση διασφαλίζει ότι τα μαθηματικά γίνονται ένα προσβάσιμο και ευχάριστο ταξίδι για όλους, προωθώντας την ιδέα ότι τα μαθηματικά δεν είναι ταλέντο αλλά μια δεξιότητα που καλλιεργείται μέσω της προσπάθειας, της πρακτικής εξάσκησης και της κατάλληλης εκπαιδευτικής υποστήριξης.



Για παιδιά ηλικίας μεταξύ 3 και 8 ετών, τα θεμέλια της μαθηματικής σκέψης τίθενται μέσω των διαδικασιών της καταμέτρησης και της παρατήρησης.

Η καταμέτρηση παρέχει ένα απτό σημείο εισόδου στον κόσμο των μαθηματικών, επιτρέποντας στα παιδιά να κατανοήσουν και να χειριστούν τους αριθμούς. Μέσω της καταμέτρησης, τα παιδιά αρχίζουν ν' αναγνωρίζουν αριθμητικά μοτίβα, να αναπτύσσουν μια διαισθητική κατανόηση της έννοιας της ποσότητας και να κατανοούν έννοιες όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση. Επιπλέον, η καταμέτρηση ενισχύει τις δεξιότητές τους στην παρατήρηση, καθώς διακρίνουν διαφορές και ομοιότητες μεταξύ των αντικειμένων. Με αυτόν τον τρόπο, η καταμέτρηση ανοίγει το δρόμο για ανάπτυξη μιας πιο σύνθετης μαθηματικής συλλογιστικής αργότερα. Ενσταλάζει στους νεαρούς μαθητές μια αίσθηση τάξης και οργάνωσης, οι οποίες

αποτελούν ζωτικής σημασίας μαθηματικές αρχές. Η καταμέτρηση δεν εξοπλίζει μόνο τα παιδιά με πρακτικά εργαλεία για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων, αλλά επίσης καλλιεργεί και την μαθηματική τους περιέργεια και αυτοπεποίθηση, θέτοντας τις βάσεις για μια περιπέτεια μαθηματικής εξερεύνησης και ανακάλυψης δια βίου διάρκειας.

Η παρατήρηση δεν έχει να κάνει μόνο με την όραση. Έχει να κάνει με την παρατήρηση λεπτομερειών, μοτίβων και σχέσεων. Αυτή η δεξιότητα είναι θεμελιώδης όχι μόνο για τη μαθηματική σκέψη αλλά και για τη συνολική γνωστική ανάπτυξη ενός παιδιού, καθώς καλλιεργεί την ικανότητά του να διακρίνει μοτίβα, σχέσεις και λεπτομέρειες στον κόσμο γύρω του. Μέσω της έντονης παρατήρησης, τα παιδιά μαθαίνουν ν' αναγνωρίζουν σχήματα, μεγέθη, χρώματα και χωρικές διατάξεις, τα οποία αποτελούν θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες. Επιπλέον, η παρατήρηση του φυσικού κόσμου, των αντικειμένων, ακόμη και των καθημερινών ρουτινών, τους επιτρέπει να κατανοήσουν έννοιες όπως η συμμετρία, η αλληλουχία και η καταμέτρηση. Τους ενθαρρύνει επίσης

να θέτουν ερωτήσεις, να κάνουν υποθέσεις και να εξάγουν συμπεράσματα – μια διαδικασία παρόμοια με την επιστημονική μέθοδο, η οποία στηρίζει τη μαθηματική έρευνα. Αυτή η διαδικασία έντονης παρατήρησης δεν προκαλεί μόνο το αίσθημα της μαθηματικής περιέργειας, αλλά καλλιεργεί παράλληλα δεξιότητες κριτικής σκέψης που είναι ζωτικής σημασίας για την επίλυση προβλημάτων και τη μαθηματική συλλογιστική. Στην ουσία, η παρατήρηση γίνεται ο φακός μέσω του οποίου οι μικροί μαθητές αντιλαμβάνονται και ασχολούνται με τις μαθηματικές έννοιες, λειτουργώντας ως το θεμέλιο πάνω στο οποίο δομείται η μαθηματική τους κατανόηση.



Πριν προχωρήσουμε, ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα που έχουν αντληθεί από την πραγματική ζωή, και τα οποία είναι άμεσα διαθέσιμα προς τους γονείς και τους εκπαιδευτικούς για την εξάσκηση των εννοιών της παρατήρησης και της καταμέτρησης.



Δημιουργία ενός Βραχιολιού από Ξύλινες Χάντρες: Οι δραστηριότητες χειροτεχνίας παρέχουν εξαιρετικές ευκαιρίες για εξάσκηση της δεξιότητας της καταμέτρησης και της αναγνώρισης μοτίβων. Κατά τη δημιουργία ενός βραχιολιού, ζητήστε από το παιδί να επιλέξει χάντρες διαφορετικών χρωμάτων και μεγεθών. Τα παιδιά μπορούν να εξασκηθούν στην καταμέτρηση καθώς περνούν κάθε χάντρα πάνω στην κλωστή και να δημιουργήσουν μοτίβα τοποθετώντας τις χάντρες σε μια συγκεκριμένη σειρά.

Κυνήγι Θησαυρού στη Φύση: Κάντε μια βόλτα στη φύση σε ένα πάρκο ή στην αυλή σας και δημιουργήστε μια λίστα για κυνήγι θησαυρού με αντικείμενα που θα μπορούσατε να παρατηρήσετε και να καταμετρήσετε με το παιδί σας. Για παράδειγμα, θα μπορούσατε να τους δώσετε οδηγίες όπως «Εντοπίστε τρεις διαφορετικούς τύπους φύλλων» ή «Μετρήστε πόσα πουλιά βλέπετε». Αυτή η δραστηριότητα ενθαρρύνει την ανάπτυξη των δεξιοτήτων παρατήρησής τους, καθώς και την αριθμητική τους αντίληψη.

Αναζήτηση Κογχυλιών στην Παραλία: Κάντε μια βόλτα κατά μήκος της ακτογραμμής με το παιδί σας και εμπλέξτε το στην καταμέτρηση και την παρατήρηση. Πόσα διαφορετικά είδη κογχυλιών μπορείτε να εντοπίσετε; Ποια μοτίβα ή σχήματα παρατηρείτε; Η καταμέτρηση αυτών των θαλάσσιων «θησαυρών» μπορεί να μετατρέψει μια βόλτα στην παραλία σε μια μαθηματική περιπέτεια.



Καταμέτρηση των Αστεριών: Μια νύχτα με «καθαρό» ουρανό, ξαπλώστε πάνω σε μια κουβέρτα και κοιτάξτε τ' αστέρια με το παιδί σας. Μετρήστε τα αστέρια που μπορείτε να διακρίνετε και ενθαρρύνετε το παιδί σας να εντοπίσει αστερισμούς. Αυτή η δραστηριότητα ενισχύει τόσο τις δεξιότητες καταμέτρησης, όσο και την ικανότητα παρατήρησης μοτίβων στον νυχτερινό ουρανό.

Ψώνια στην Υπεραγορά: Ενώ ψωνίζετε στην υπεραγορά, ζητήστε από το παιδί σας να μετρήσει τα είδη που βάζετε στο καλάθι. Για παράδειγμα, μπορείτε να το παροτρύνετε λέγοντας τις εξής φράσεις: «Ας βάλουμε τρία μήλα στο καλάθι» ή «Χρειαζόμαστε έξι

αυγά». Αυτή η απλή δραστηριότητα ενισχύει τις δεξιότητες καταμέτρησης των παιδιών εντός ενός πραγματικού πλαισίου.

Μαγειρεύοντας Μαζί: Το μαγείρεμα προσφέρει πολλαπλές ευκαιρίες για καταμέτρηση και παρατήρηση. Ζητήστε από το παιδί σας να μετρήσει τον αριθμό των συστατικών που απαιτούνται για μια συνταγή, όπως πόσα φλιτζάνια αλεύρι ή πόσα κουταλάκια του γλυκού ζάχαρη χρειάζεται να προσθέσετε. Μπορούν επίσης να παρατηρήσουν πώς αλλάζουν τα συστατικά κατά τη διάρκεια της διαδικασίας μαγειρέματος.

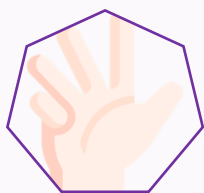


Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν πώς η παρατήρηση και η καταμέτρηση μπορούν να ενσωματωθούν απρόσκοπτα στις καθημερινές δραστηριότητες, εμπλουτίζοντας τη μαθηματική κατανόηση ενός παιδιού, καλλιεργώντας παράλληλα ένα αίσθημα θαυμασμού για τον κόσμο γύρω του. Στις ενότητες που ακολουθούν, θα εμβαθύνουμε σε συγκεκριμένες δραστηριότητες και εργαστήρια εμπνευσμένα από το έργο SMEM, που έχουν σχεδιαστεί για να κάνουν τα μαθηματικά μια συναρπαστική και ευχάριστη εμπειρία για τα μικρά παιδιά.

Ενσωμάτωση των Μαθηματικών Εννοιών της Παρατήρησης και της Καταμέτρησης στην Προσχολική Εκπαίδευση

Μια άρτια μαθηματική εκπαίδευση για μικρά παιδιά σημαίνει αντιστοίχιση των μεθόδων διδασκαλίας με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος των σχολείων. Το έργο SMEM - “Significant Mathematics for Early Mathematicians” («Σημαντικά Μαθηματικά για Νεαρούς Μαθηματικούς») παρέχει ένα πολύτιμο πλαίσιο για την ενσωμάτωση των μαθηματικών εννοιών της παρατήρησης και της καταμέτρησης στο αναλυτικό πρόγραμμα των σχολείων για παιδιά ηλικίας 3 έως 8 ετών.

Στο νηπιαγωγείο, τα παιδιά εισάγονται στον κόσμο των μαθηματικών μέσω δραστηριοτήτων που είναι βασισμένες στο παιχνίδι, καθώς και μέσω δραστηριοτήτων διερεύνησης. Η καταμέτρηση και η παρατήρηση αποτελούν θεμελιώδεις έννοιες σε αυτό το στάδιο της μάθησης.



Το αναλυτικό πρόγραμμα του νηπιαγωγείου περιλαμβάνει συνήθως βασικές δεξιότητες καταμέτρησης, μέσω των οποίων τα παιδιά μαθαίνουν να μετρούν από το 1 έως το 10 και πέρα από αυτό. Η καταμέτρηση είναι ενσωματωμένη στις καθημερινές τυπικές δραστηριότητες της τάξης, όπως η καταμέτρηση του αριθμού των παιδιών που βρίσκονται σ’ αυτήν, η καταμέτρηση αντικειμένων

κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού ή η καταμέτρηση των βημάτων των μαθητών κατά τη διάρκεια μιας βόλτας στη φύση. Αυτές οι δραστηριότητες δεν αναπτύσσουν μόνο την αριθμητική αντίληψη των παιδιών, αλλά ενισχύουν επίσης τις γλωσσικές τους δεξιότητες.

Η διαδικασία της παρατήρησης στο πλαίσιο του νηπιαγωγείου περιλαμβάνει την υποβοήθηση των παιδιών στο να παρατηρήσουν τις λεπτομέρειες που υπάρχουν στο περιβάλλον τους.

Περιλαμβάνει επίσης την αναγνώριση των σχημάτων των καθημερινών αντικειμένων, την αναγνώριση μοτίβων στα ρούχα τους ή στο περιβάλλον της τάξης, ή ακόμη την παρατήρηση του τρόπου με τον οποίο διάφορα αντικείμενα αλλάζουν μέγεθος, χρώμα ή θέση. Αυτές οι



παρατηρήσεις θέτουν τα θεμέλια για την αναγνώριση προτύπων και την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης.

Καθώς τα παιδιά προχωρούν στο δημοτικό σχολείο, οι μαθηματικές έννοιες γίνονται ολοένα και πιο δομημένες και ολοκληρωμένες. Οι δεξιότητες μέτρησης και παρατήρησης συνεχίζουν να διαδραματίζουν ζωτικό ρόλο στο σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα.



Στο αναλυτικό πρόγραμμα του δημοτικού σχολείου, η καταμέτρηση εξελίσσεται σε πιο σύνθετες διεργασίες, συμπεριλαμβανομένης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Οι μαθητές δεν μετρούν μόνο αντικείμενα, αλλά μαθαίνουν επίσης να προσθέτουν και να αφαιρούν αριθμούς οι οποίοι εμπίπτουν σε συγκεκριμένα αριθμητικά εύρη. Η καταμέτρηση καθίσταται ένα εργαλείο για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων, όπως ο υπολογισμός του συνολικού κόστους των αντικειμένων σε ένα κατάστημα ή η ισότιμη κοινή χρήση αντικειμένων μεταξύ των συμμαθητών.

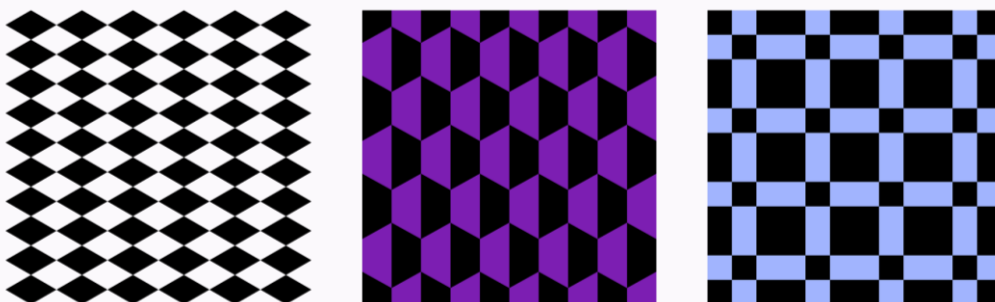


Οι δεξιότητες παρατήρησης στο δημοτικό σχολείο εκτείνονται πέρα από την αναγνώριση μοτίβων σε αντικείμενα. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να παρατηρούν και να ερμηνεύουν δεδομένα, διαγράμματα και γραφήματα. Μαθαίνουν να αναλύουν τις πληροφορίες κριτικά, να κάνουν προβλέψεις και να εξάγουν συμπεράσματα. Αυτή η μορφή παρατήρησης είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση εννοιών όπως η αναπαράσταση δεδομένων και η στατιστική.

Εκθέματα του έργου SMEM που σχετίζονται με τις έννοιες της Καταμέτρησης και της Παρατήρησης

Αναπαράσταση αριθμών

Στο έκθεμα στο οποίο γίνεται αναπαράσταση αριθμών, οι εκπαιδευόμενοι θα πρέπει να ταιριάζουν τις μάρκες με εικόνες οι οποίες έχουν ως κοινή θεματική το δάσος με τους αριθμούς 1-10 που βρίσκονται στον πίνακα. Μια επιλογή για την επέκταση αυτής της δραστηριότητας στην τάξη είναι η χρήση ψηφιδωτών. Οι ψηφίδες είναι δισδιάστατα γεωμετρικά μοτίβα τα οποία ταιριάζουν μεταξύ τους χωρίς να αφήνουν κενά ή να επικαλύπτονται και μπορούν να επαναληφθούν προς όλες τις κατευθύνσεις επ' αόριστον. Στις παρακάτω εικόνες, μπορείτε να δείτε παραδείγματα ψηφιδωτών στα οποία χρησιμοποιούνται κανονικά πολύγωνα.



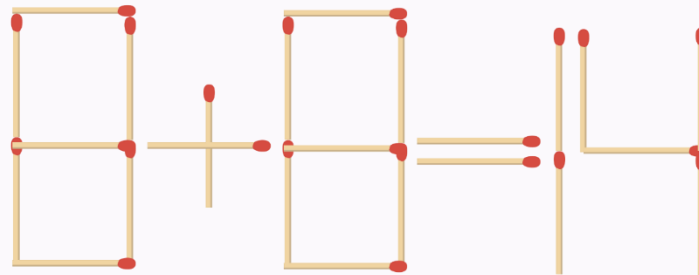
Παραδείγματα ψηφιδωτών στα οποία χρησιμοποιούνται πολύγωνα (ρόμβοι, τραπεζοειδή/εξάγωνα, τετράγωνα)

Μια δραστηριότητα για τη χρήση ψηφίδων σε συνδυασμό με την καταμέτρηση είναι να προτρέψετε τους μαθητές να επιλέξουν 1-4 σχήματα τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία μοτίβων. Ο εκπαιδευτικός μπορεί επίσης να παίξει ένα παιχνίδι στο οποίο τα παιδιά θα πρέπει να βρουν τις διαφορές προκειμένου να εντοπίσουν ποια σχήματα δεν ανήκουν στο μοτίβο.



Αυτές οι δραστηριότητες θα μπορούσαν να επεκταθούν κατά τη διάρκεια περιπάτων στη φύση, κατά την διάρκεια των οποίων θα μπορούσαν ν' ανατεθούν προκλήσεις στα παιδιά για τη δημιουργία όμορφων μοτίβων χρησιμοποιώντας φυσικά στοιχεία όπως βράχους, φύλλα, μούρα, λουλούδια, κοχύλια κ.λπ.

Μια διαφορετική δραστηριότητα που μπορεί να εφαρμοστεί για τη ενίσχυση των δεξιοτήτων των παιδιών όσον αφορά την αριθμητική είναι η δημιουργία παζλ από σπέρτα σχηματίζοντας αριθμούς με ορισμένους, με την επιβολή ορισμένων περιορισμών, όπως το ότι μπορείτε να μετακινήσετε ή να αφαιρέσετε μόνο 1 ή 2 σπέρτα για να δημιουργήσετε μια συγκεκριμένη την εξίσωση ή να σχηματίσετε κάποιο συγκεκριμένο άθροισμα. Στο παρακάτω παράδειγμα, μπορείτε να προσθέσετε τον περιορισμό κατά τον οποίο πρέπει μπορεί να αφαιρεθεί ή να μετακινηθεί 1 μόνο σπέρτο για τη δημιουργία του ορθού αθροίσματος.



Μια άλλη δραστηριότητα για την εξάσκηση στις πράξεις της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού θα μπορούσε να είναι ένα παιχνίδι, στόχος του οποίου να είναι η εύρεση των αριθμών που, εάν προστεθούν, δημιουργούν το συγκεκριμένο άθροισμα. Υπάρχουν δύο τρόποι για να το προσεγγίσει κανείς αυτό: είτε λέγοντας το άθροισμα στα παιδιά και δίνοντάς τους την επιλογή να επιλέξουν πόσοι διαφορετικοί αριθμοί χρησιμοποιώντας πρόσθεση μπορούν να συνθέσουν το άθροισμα, είτε δίνοντας χαρακτηριστικά του αριθμού με βάση ερωτήσεις που μπορούν ν' απαντηθούν με ένα ναι ή ένα όχι.

Τέτοιες ερωτήσεις θα μπορούσαν να είναι οι εξής:

- Είναι ο αριθμός μεγαλύτερος από 20;
- Είναι ο αριθμός μονός ή ζυγός;
- Μπορεί ο αριθμός να διαιρεθεί με το 2 ή το 3; (Αυτή η ερώτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας).

Αφού τα παιδιά βρουν τον αριθμό, μπορείτε να κάνετε επαναλάβετε την δραστηριότητα και να ζητήσετε από αυτά να σας αναφέρουν πιθανούς συνδυασμούς αριθμών.

Αυτή αποτελεί επίσης μία από τις ιδανικότερες θεματικές μέσω των οποίων μπορείτε να παρουσιάσετε το παιχνίδι του *Ποιο(ς) δεν ταιριάζει*. Στα πλαίσια αυτού του παιχνιδιού υπάρχουν τέσσερις εικόνες ή αντικείμενα οι οποίες/τα οποία μοιράζονται ένα κοινό χαρακτηριστικό, και το οποίο τρεις προς τρεις εικόνες ή αντικείμενα μοιράζονται, το οποίο επιτρέπει τον αποκλεισμό του τέταρτου στοιχείου ως αυτό που δεν ταιριάζει με τα υπόλοιπα. Ωστόσο, δεν υπάρχει μία μόνο σωστή απάντηση, καθώς υπό διαφορετικές συνθήκες, καθένα από τα στοιχεία θα μπορούσαν ν' αποκλειστούν – χρειάζεται απλά να γνωρίζει κανείς τον σωστό λόγο για καθεμιά περίπτωση.



Φιδάκι II

Το έκθεμα με την ονομασία «Φιδάκι II» παίζεται με 2 μαθητές, οι οποίοι ρίχνουν τα ζάρια και πρέπει να μετακινήσουν τις μάρκες τους σύμφωνα με την των αριθμό που φέρνουν τα ζάρια. Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης της δραστηριότητας για μαθητές ηλικίας 6-7 ετών είναι η χρήση δύο ζαριών σε δύο διαφορετικά χρώματα (π.χ. κόκκινο και μπλε), όπου το κόκκινο μετακινείται προς τα εμπρός και το μπλε μετακινείται προς τα πίσω. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές εξασκούνται στην αφαίρεση.

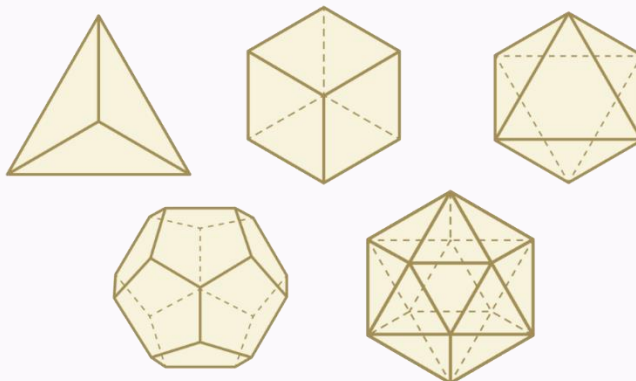
Ένα ρυθμικό παιδικό παιχνίδι όπως για παράδειγμα το «Παλαμάκια παίζετε» (ή το αντίστοιχό του “pat-a-cake”) εισάγει το στοιχείο του ρυθμού στα μοτίβα αριθμών. Έχοντας απέναντί σας ένα παιδί (ή παιδιά σε ζευγάρια τα οποία αντικρίζουν το ένα το άλλο) χτυπάτε ξεχωριστά τα χέρια σας μαζί και στη συνέχεια χτυπάτε και τα δύο χέρια ο ένας του άλλου. Όταν εξοικειωθείτε μ’ αυτές τις κινήσεις, προσθέστε ένα μοτίβο με το οποίο θα μετράτε και το οποίο και τα δύο άτομα θα λέτε από κοινού ενώ χτυπάτε ο ένας τα χέρια του άλλου. Για παράδειγμα, χτύπημα, τρία – χτύπημα, έξι - χτύπημα, εννέα - χτύπημα, δώδεκα κ.ο.κ. ... Η αλλαγή εισάγεται από το ένα άτομο, το οποίο ξεκινά πρώτο ελέγχοντας την ταχύτητα των χτυπημάτων, ενώ το άλλο άτομο θα πρέπει να ακολουθεί συμβαδίζοντας μαζί του.

Θα μπορούσατε ακόμη να παίξετε το παιχνίδι με την ονομασία “Twenty” («Είκοσι»). Πρόκειται για ένα παιχνίδι καταμέτρησης στο οποίο δύο άτομα μετρούν εκ περιτροπής από το ένα έως το είκοσι με στόχο να κάνουν τον αντίπαλό σας να πει «Είκοσι». Έχετε τη δυνατότητα να μετρήσετε κατά έναν, δύο ή τρεις αριθμούς. Υπάρχει μια στρατηγική μέσω της οποίας μπορείτε να κερδίσετε, αλλά δεν είναι προφανής, αν και θα μπορούσατε να δοκιμάσετε προσφέροντας στους μαθητές μερικές συμβουλές για να βοηθήσετε τα παιδιά να την ανακαλύψουν. Ο αριθμός-στόχος θα μπορούσε να αλλάξει από είκοσι σε μεγαλύτερους αριθμούς, ενώ θα μπορούσατε ακόμα να μετράτε κατά δύο ή τρία ή ακόμα και να προσθέσετε στο παιχνίδι έναν τρίτο παίκτη. Επιπλέον, με τα παιδιά μικρότερης ηλικίας, θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε είκοσι νομίσματα ή μάρκες αντί να μετράτε τους αριθμούς δυνατά.

Μετρώντας Πλευρές

Στο έκθεμα με την ονομασία «Μετρώντας Πλευρές», οι μαθητές ρίχνουν τα ζάρια και πρέπει να βρουν το σχήμα που έχει τον ίδιο αριθμό πλευρών με την ένδειξη που φέρνουν τα ζάρια. Ένας τρόπος διεύρυνσης αυτής της δραστηριότητας για τους μαθητές μικρότερων ηλικιών ώστε να τους παροτρύνουμε ν’ ασχοληθούν τόσο με την καταμέτρηση όσο και με τη γεωμετρία είναι να ζητήσετε απ’ αυτούς να σχηματίσουν ένα τρίγωνο τεντώνοντας τα χέρια τους. Μόλις οι μαθητές σχηματίσουν το τρίγωνο, βγάλτε μια φωτογραφία και ζητήστε τους να μετρήσουν πόσα χέρια χρειάζονται. Για να πάτε ένα βήμα παραπέρα, κοιτάζοντας ένα τετράεδρο, ζητήστε από τους μαθητές να μετρήσουν πόσα ακόμη χέρια θα χρειάζονταν για να μετατρέψουν το τρίγωνο σε τετράεδρο.

Για τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας, η δραστηριότητα μπορεί να διευρυνθεί ζητώντας τους να μετρήσουν τις ακμές και τις κορυφές των στερεών και να παρατηρήσουν ποιες συνθήκες είναι απαραίτητες ώστε ένα σχήμα να έχει κορυφές ή ακμές. Μπορείτε επίσης να τους ζητήσετε να αναδημιουργήσουν τα πλατωνικά στερεά με ράβδους με μαγνήτες οι οποίες θα τους επιτρέψουν ν' απεικονίσουν τα γεωμετρικά σχήματα.

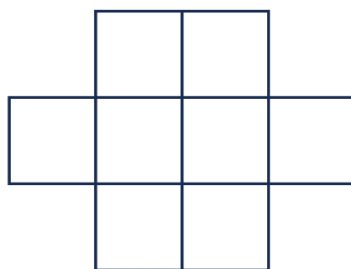


Χαρούμενοι Γείτονες

Αυτό το έκθεμα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εναλλάσσοντας τους κανόνες για τον υπάρχοντα πίνακα ή αλλάζοντας τον ίδιο τον πίνακα.

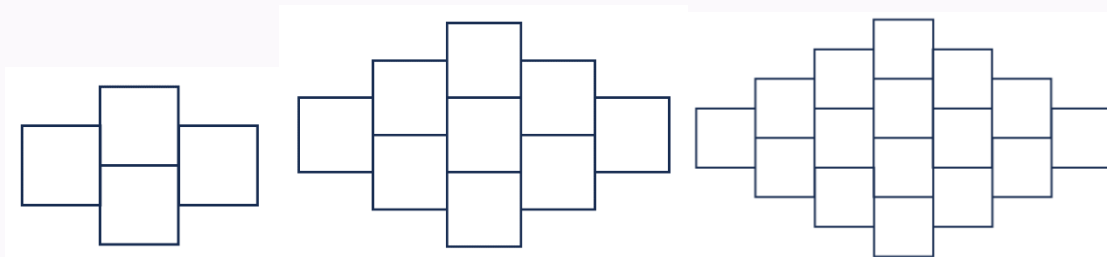
Η πρώτη επιλογή θα ήταν να εισαχθούν μάρκες στις οποίες ν' αναγράφονται αριθμοί από το 1 έως το 9 αντί για μάρκες διαφορετικών χρωμάτων, αλλά εισάγοντας παράλληλα έναν παρόμοιο κανόνα: οι διαδοχικοί αριθμοί δεν πρέπει να γειτνιάζουν. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για να τοποθετήσετε τις μάρκες ακολουθώντας αυτόν τον κανόνα;

Οι πίνακες θα μπορούσαν ν' αλλάζουν με τρόπο ώστε το επίπεδο δυσκολίας των προκλήσεων ν' αυξάνεται σταδιακά. Ως πρώτη επιλογή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας ο οποίος αποτελείται από οκτώ μόνο τετράγωνα τοποθετημένα με τον ακόλουθο τρόπο:



Ο κανόνας που θα εφαρμοστεί θα ήταν ο εξής: πρέπει να τοποθετηθούν οι μάρκες στις οποίες ν' αναγράφονται οι αριθμοί από το 1 έως το 8 με τέτοιο τρόπο ώστε οι διαδοχικοί αριθμοί να μην μοιράζονται μεταξύ τους καμία πλευρά ή κορυφή. Για τα παιδιά μικρότερης ηλικίας, αντί για αριθμούς, οι μάρκες θα μπορούσαν να είναι σε τρία διαφορετικά χρώματα, με τρεις διαφορετικές επιλογές όσον αφορά τους κανόνες: οι μάρκες ίδιου χρώματος δεν μπορούν να μοιράζονται καμία πλευρά και καμία κορυφή, ή το θεώρημα των 4 χρωμάτων – δεν μπορούν να μοιράζονται κάποια πλευρά, αλλά μπορούν να μοιράζονται την ίδια κορυφή. Πόσα διαφορετικά χρώματα είναι απαραίτητα σε αυτή την περίπτωση; Εάν ο κανόνας ήταν ισχυρότερος, αναφέροντας ότι οι μάρκες ίδιου χρώματος δεν μπορούν να μοιράζονται καμία πλευρά ή κορυφές, θα χρειαζόμασταν τέσσερα διαφορετικά χρώματα, αλλά σύμφωνα με τον κανόνα που αναφέρει ότι μπορούν να μοιράζονται μια κορυφή, τότε τρία χρώματα είναι αρκετά.

Η τρίτη εκδοχή αφορά το να μάθετε τρόπους με τους οποίους μπορείτε να διευρύνετε αυτό το έκθεμα με περισσότερα τετράγωνα χρησιμοποιώντας μάρκες σε τρία χρώματα και εφαρμόζοντας τον απλούστερο κανόνα. Εάν ξεκινήσουμε με το απλούστερο πλέγμα, το οποίο αποτελείται από μόνο 4 τετράγωνα, μήπως μπορούμε να τα συμπληρώσουμε με τις μάρκες σε τρία χρώματα; Ναι ή όχι; Αν ναι, γιατί; Μήπως θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε να προσθέτουμε περισσότερα τετράγωνα; Εάν μετρήσουμε τον αριθμό των τετραγώνων, με τον ελάχιστο δυνατό να είναι 4, τότε έχουμε ένα πλέγμα με 9 τετράγωνα, στη συνέχεια ένα με 16, κι έπειτα ένα με 25, το οποίο είναι στην πραγματικότητα την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των τετραγώνων που βρίσκονται στην κεντρική στήλη του πλέγματος.



Μήπως υπάρχει κάποια σχέση με το τρίγωνο του Πασκάλ;

Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι η μόνη εκδοχή που πληροί τους κανόνες είναι αυτή με το πλέγμα που αποτελείται από την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των τετραγώνων που βρίσκονται στην κεντρική στήλη του πλέγματος; Υπάρχει μια γεωμετρική απόδειξη η οποία το εξηγεί αυτό, αλλά δεν είναι κατανοητή για παιδιά κάτω των 8 ετών. Το απλό αυτό υλικό έχει τη δυνατότητα να παρουσιάζει μαθηματικά υψηλού επιπέδου δυσκολίας, αλλά συγκαλυμμένα!

Οικογένειες

Το έκθεμα με την ονομασία «Οικογένειες» ζητά από τους μαθητές να ταξινομήσουν τα αντικείμενα σε τρεις διαφορετικές ομάδες με βάση κάποια τα κριτήρια που οι ίδιοι θα επιλέξουν. Ένα παράδειγμα των κριτηρίων αυτών θα μπορούσε να είναι το μέγεθος, το χρώμα και το σχήμα των αντικειμένων. Υπάρχουν πολλές δραστηριότητες που μπορούν να εφαρμοστούν με βάση αυτή την ιδέα. Μια τέτοια δραστηριότητα θα μπορούσε να είναι η ταξινόμηση των ρούχων για πλύσιμο με βάση το χρώμα ή τη θερμοκρασία πλύσης τους.



Μια άλλη δραστηριότητα θα μπορούσε να είναι ο εντοπισμός κοινών χαρακτηριστικών μεταξύ των μαθητών και η μεταξύ τους σύγκριση, όπως για παράδειγμα το ύψος, τα ρούχα και το μήκος των μαλλιών τους, χρησιμοποιώντας ένα φυσικό διάγραμμα Βεν και κάρτες με κατηγορίες για τη χαρτογράφηση των κοινών σημείων. Στη συνέχεια, μπορείτε να τους ζητήσετε να μετρήσουν πόσα άτομα εμπίπτουν σε κάθε κατηγορία.

Ένας τρόπος με τον οποίο θα μπορούσατε να μετατρέψετε τη δραστηριότητα αυτή σε παιχνίδι θα ήταν να τους ζητήσετε να βρουν άλλα άτομα τα οποία μοιράζονται τα ίδια χαρακτηριστικά, όπως η ηλικία, το ύψος και ο μήνας γέννησης. Αυτό το παιχνίδι ονομάζεται «human bingo» (τόμπολα με ανθρώπους αντί για αριθμούς) και υπάρχουν πολλά πρότυπα τα οποία μπορείτε να βρείτε στο διαδίκτυο για να δημιουργήσετε το δικό σας παιχνίδι human bingo. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται παρακάτω, το οποίο ανακτήθηκε από το myfreebingocard.com:



Πηγή: <https://myfreebingocards.com/human-bingo>

Μια δραστηριότητα που βασίζεται σ' αυτό θα μπορούσε να είναι η ταξινόμηση των μαθητών σύμφωνα με τον μήνα γέννησής τους, η οποία εισαγάγει τους μαθητές στην έννοια των πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, εάν υπάρχουν περισσότεροι από 24 μαθητές στην τάξη, οι πιθανότητα δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα είναι 50%.

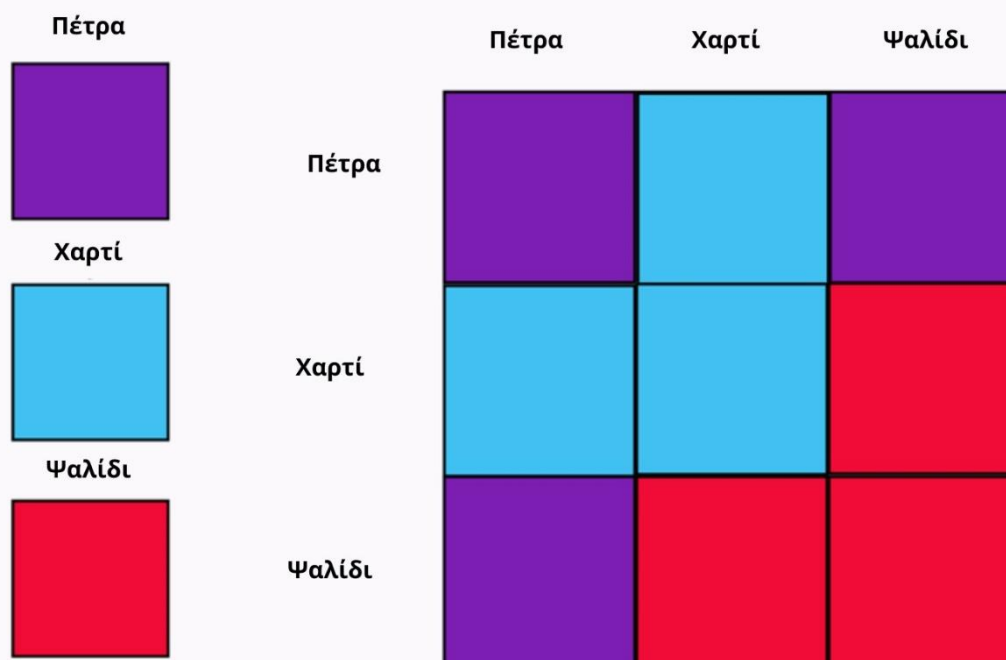
Ένας τρόπος συνδυασμού τόσο του εκθέματος με την ονομασία «Οικογένειες», όσο και αυτού με την ονομασία «Φιδάκι Ι» (το οποίο εξασκεί τους μαθητές στην έννοια της καταμέτρησης και προσφέρει παράλληλα μια ήπια εισαγωγή στην έννοια των πιθανοτήτων) μπορεί να είναι οι εκπαιδευτικοί να δημιουργήσουν τη δική τους εκδοχή ταξινόμησης σχημάτων ή αντικειμένων, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν περισσότερες από μία «οικογένειες» στις οποίες ανήκουν. Ένα παράδειγμα αυτού είναι τα logic blocks, τα οποία χρησιμοποιούν τα ίδια σχήματα με διαφορετικές υφές, μεγέθη και χρώματα κύκλων, τριγώνων και ορθογωνίων. Αυτό είναι επίσης κάτι που μπορεί να εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας ένα τάνγκραμ παζλ.



Φιδάκι Ι

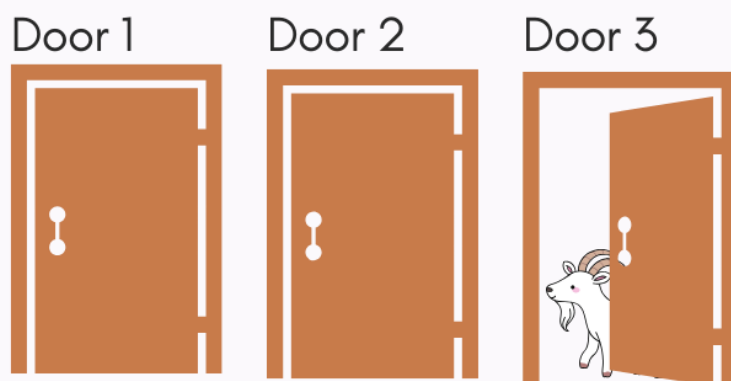
Ένας τρόπος με τον οποίο θα μπορούσατε να διευρύνετε το έκθεμα με την ονομασία «Φιδάκι Ι» και τις ενδείξεις «κορώνα ή γράμματα» στο νόμισμα (στα αγγλικά "heads or tails") με την τριβή με δραστηριότητες οι οποίες εισάγουν τους μαθητές στην έννοια των πιθανοτήτων θα ήταν να

ζητήσετε από τους μαθητές να παίξουν το παιχνίδι «Πέτρα, Ψαλίδι, Χαρτί». Μπορείτε να ορίσετε ένα χρώμα για καθεμιά από τις τρεις επιλογές και να ζητήσετε από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το χρώμα που κερδίζει ανάλογα με κάθε συνθήκη, και να τους ζητήσετε να παίξουν το παιχνίδι και να μετρήσουν πόσες φορές κέρδισαν χρησιμοποιώντας ένα από τα τρία.



Με πόσες διαφορετικές βαθμολογίες μπορεί να τελειώσει ένας αγώνας τένις εάν παίζετε σε δύο ή σε τρία σετ; Αυτή η δραστηριότητα περιλαμβάνει την οπτική αναπαράσταση των αγώνων με 2 και 3 κερδισμένα σετ χρησιμοποιώντας σχέδια ή αυτοκόλλητα σε έναν πίνακα, και στη συνέχεια καλεί τα παιδιά να συμμετάσχουν στην καταμέτρηση των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να τελειώσει ένας αγώνας τένις με βάση αυτές τις συνθήκες. Τα παιδιά σημειώνουν εκ περιτροπής τον πίνακα με τα διάφορα αποτελέσματα του αγώνα, με τρόπο ώστε ένας παίκτης να κερδίζει όλους τους αγώνες, ενώ και οι δύο παίκτες να κερδίζουν ίσο αριθμό αγώνων ή να σημειώνονται διαφορετικοί συνδυασμοί νικών για κάθε παίκτη. Μέσω αυτής της διαδικασίας καταμέτρησης, τα παιδιά μαθαίνουν τις αρχές της καταμέτρησης, ενώ παράλληλα διερευνούν τις ποικίλες πιθανότητες που υπάρχουν όσον αφορά τη βαθμολογία με την οποία θα μπορούσε να ολοκληρωθεί ένας αγώνας τένις, ενισχύοντας το ενδιαφέρον, τη δημιουργικότητα και τις βασικές μαθηματικές τους δεξιότητες στις έννοιες της καταμέτρησης και των πιθανοτήτων.

Θα μπορούσατε επίσης να παίξετε την σπαζοκεφαλιά με την ονομασία Monty Hall με τη μορφή παιχνιδιού στην τάξη. Στο παιχνίδι αυτό, ένα άτομο το οποίο αναλαμβάνει το ρόλο του παρουσιαστή ανοίγει την πόρτα της επιλογής του και οι υπόλοιποι μαθητές πρέπει να επιλέξουν αν θ' αλλάξουν την πόρτα που έχουν επιλέξει ή αν θα παραμείνουν στην ίδια επιλογή. Η ιδέα πίσω από το παιχνίδι είναι ότι η εναλλαγή είναι πάντα καλύτερη από τη διατήρηση της ίδιας επιλογής. Μπορούν να παίξουν το παιχνίδι για μερικούς γύρους στην τάξη και να μετρήσουν πόσες φορές χρειάστηκε ν' αλλάξουν την επιλογή τους όσον αφορά την πόρτα. Η επεξήγηση της λογικής που βρίσκεται πίσω απ' αυτή τη σπαζοκεφαλιά μπορεί να γίνει σε μεταγενέστερο στάδιο.



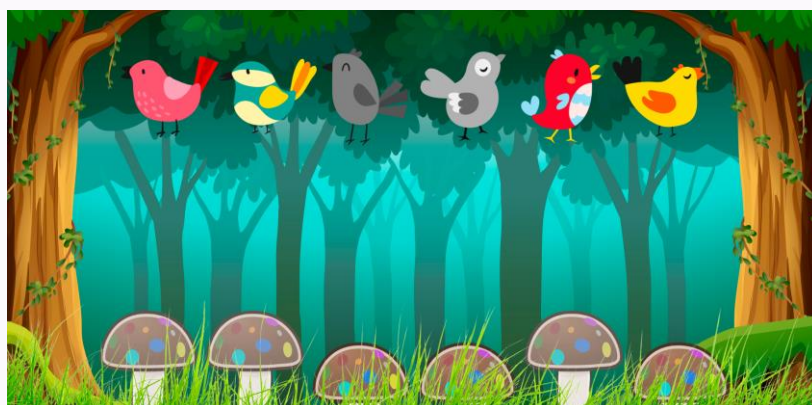
Τα Πουλιά που Κελαηδούν (Singing Birds)

Η εφαρμογή "Singing Birds" παρουσιάζει έξι πουλιά («φώτα») τα οποία μπορούν να ανάψουν ή να σβήσουν, καθώς κι έξι κουμπιά («κουμπιά») τα οποία μπορούν να πατηθούν ή να μην πατηθούν. Κάθε κουμπί αλλάζει την κατάσταση ενός ή περισσότερων πουλιών, αλλά δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποια πουλιά είναι «συνδεδεμένα» με κάθε κουμπί. Κάθε γύρος του παιχνιδιού παρουσιάζει διαφορετικές τυχαίες συνδέσεις. Τα πουλιά είναι αρχικά όλα απενεργοποιημένα, και ο στόχος είναι να τα ενεργοποιήσετε όλα. Κάθε πουλί το οποίο ανάβει παράγει μια νότα, ενώ αν ανάψουν όλα τα πουλιά δημιουργείται μια ωραία συγχορδία.

Το παιδί θα κατανοήσει αυτές τις οδηγίες, αλλά η εύρεση μιας λύσης θα προκύψει μόνο αφού γίνουν πολλές δοκιμές και λάθη. Μετά από μερικούς γύρους του παιχνιδιού, το παιδί θα είναι σε θέση ν' αναπτύξει κάποιες στρατηγικές και ο εκπαιδευτικός μπορεί να το καθοδηγήσει προσφέροντάς τους επιπλέον στοιχεία.

Πριν προσπαθήσουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα, πρέπει να φανταστούμε πώς μπορεί να μοιάζει η λύση. Μια πρώτη βασική παρατήρηση είναι ότι η σειρά με την οποία πατάμε τα κουμπιά δεν έχει σημασία, και ότι το να πατήσουμε δύο φορές ένα κουμπί είναι το ίδιο με το να μην το πατήσουμε καθόλου. Αυτό μπορεί να μην είναι εμφανές εκ πρώτης όψεως, οπότε θα μπορούσε κανείς να φανταστεί ότι ο τρόπος για να φτάσει στη λύση περιλαμβάνει μια μακρά ακολουθία πατημάτων κουμπιών με συγκεκριμένη σειρά. Μόλις καταλάβουμε ότι η σειρά με την οποία πατούμε τα κουμπιά δεν έχει σημασία, είναι σαφές ότι η λύση προκύπτει απλώς από μια συγκεκριμένη επιλογή ή συνδυασμό των κουμπιών που πρέπει να πατηθούν. Αυτό καθιστά δυνατή τη διαμόρφωση μιας στρατηγικής απαρίθμησης (π.χ. για να δοκιμάσουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς).

Μια δεύτερη βασική παρατήρηση είναι ότι σε γενικές γραμμές ορισμένα από τα πουλιά επηρεάζονται μόνο από μερικά κουμπιά. Εάν, κατά την διερεύνηση, διαπιστώσουμε ότι ένα πουλί



επηρεάζεται μόνο από ένα κουμπί, είναι βέβαιο ότι αυτό το κουμπί χρειάζεται να πατηθεί. Αν διαπιστώσουμε ότι ένα πουλί επηρεάζεται από δύο κουμπιά, είναι βέβαιο ότι πρέπει να πατηθεί είτε το ένα είτε το άλλο (αλλά όχι και τα δύο, ούτε και κανένα απ' τα δυο). Αυτό διαφοροποιεί αυτό το σύνολο των δύο κουμπιών από τα υπόλοιπα, κι έτσι μπορούμε να δοκιμάσουμε την πρώτη επιλογή, και εφόσον αυτή δεν είναι επιτυχής, μπορούμε να συνεχίσουμε με τη δεύτερη. Αυτά τα ευρήματα συνεπάγονται μια επαγωγική συλλογιστική η οποία εν τέλει μειώνει το σύνολο των πιθανών συνδυασμών, περιορίζοντας έτσι την αναζήτηση μέχρι να βρεθεί η λύση.

Αυτή η τεχνική με τη μέθοδο της δοκιμής και του σφάλματος ("trial and error") η οποία βελτιώνεται με την εφαρμογή του επαγωγικού περιορισμού του πεδίου αναζήτησης εμπίπτει σε αυτό που ονομάζουμε «παρατήρηση και καταμέτρηση» ("observing and counting"). Η καταμέτρηση αντικειμένων ως διεργασία μπορεί να είναι πιο περίπλοκη από την απαρίθμηση. Πρώτον, περιλαμβάνει μια περιγραφή του πεδίου συνδυασμών, και δεύτερον, απαιτεί τον αποκλεισμό κάποιων (ή όλων των) μη έγκυρων συνδυασμών που δεν χρειάζεται να δοκιμαστούν.

Για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται να μάθει περισσότερα, περιλαμβάνουμε μια μαθηματική περιγραφή του παιχνιδιού. Το πρόβλημα μπορεί να τυποποιηθεί με τη χρήση της γραμμικής άλγεβρας. Πατάμε το πρώτο κουμπί, βλέπουμε ποια από τα πουλιά ενεργοποιούνται και καταγράφουμε αυτή την πληροφορία ως ένα διάνυσμα στήλης με έξι μηδενικά και άσους (ένα 1 για κάθε ενεργοποιημένο πουλί, ένα 0 για κάθε πουλί το οποίο δεν ενεργοποιείται). Για παράδειγμα, προκύπτει το διάνυσμα (0,0,1,1,0,0) εάν ενεργοποιούνται μόνο το τρίτο και το τέταρτο πουλί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με το καθένα από τα έξι κουμπιά για να πάρουμε έξι διανύσματα-στήλες. Έπειτα, στοιχίζουμε τα έξι διανύσματα-στήλες για να δημιουργήσουμε έναν πίνακα A. Στη συνέχεια, για οποιονδήποτε συνδυασμό χ πατημένων κουμπιών (για παράδειγμα $\chi = (1,1,0,0,0,1)$ ως στήλη-διάνυσμα αν πατήσουμε τα κουμπιά 1,2 και 6), ο αριθμός των πουλιών που ενεργοποιούνται δίνεται από το γινόμενο του πίνακα A - χ . Οι πίνακες και τα διανύσματα πρέπει να θεωρηθούν ως modulo 2, δηλαδή αντικαθιστώντας κάθε άρτια καταχώρηση με το 0 και κάθε περιττή καταχώρηση με το 1. Η επίλυση του γρίφου ισοδυναμεί με την επίλυση του γραμμικού συστήματος $A - \chi = (1,1,1,1,1,1)T$, η οποία μπορεί να γίνει με οποιαδήποτε τυπική μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων εξισώσεων (απαλοιφή Gauss, αντιστροφή του A, κ.λπ.). Η εφαρμογή είναι σχεδιασμένη έτσι ώστε να εγγυάται ότι ο πίνακας A επιλέγεται να είναι αντιστρέψιμος, οπότε υπάρχει πάντα μια μοναδική λύση του γρίφου.

Άλλοι παρόμοιοι γρίφοι που μπορούν να προσφερθούν σε παιδιά παρόμοιων ηλικιών περιλαμβάνουν αυτόν με την ονομασία "[Lights-out](#)". Πρόκειται για ένα φυσικό ηλεκτρονικό [παιχνίδι](#) το οποίο ήταν δημοφιλές κατά τη δεκαετία του '90 και μπορεί να παιχτεί σε διαδικτυακές εκδοχές στις μέρες μας. Οι μηχανισμοί του είναι παρόμοιοι με αυτούς του προαναφερθέντος παιχνιδιού. Στην περίπτωση του παιχνιδιού αυτού όμως, τα κουμπιά αποτελούν ταυτόχρονα και τα ίδια φωτάκια, ενώ υπάρχουν 25 απ' αυτά, τοποθετημένα σε ένα πλέγμα διαστάσεων 5x5. Κάθε κουμπί ενεργοποιεί το δικό του φωτάκι, καθώς και τα φωτάκια των κουμπιών που εφάπτονται σε κάποια από τις πλευρές τους. Αυτή η σταθερή και προβλέψιμη συσχέτιση μεταξύ κουμπιών και φώτων

διευκολύνει την εκμάθηση μέσω της εξάσκησης, ενισχύοντας παράλληλα την αναγνώριση μοτίβων. Μια παρόμοια μελέτη της γραμμικής άλγεβρας δίνει στο πρόβλημα μια μαθηματική λύση.

Τέλος, οι έννοιες της συμμετρίας και της ισοδυναμίας συγκαταλέγονται μεταξύ των πιο συνηθισμένων και χρήσιμων εργαλείων σε δραστηριότητες μαθηματικής «μαγείας» (π.χ. το [Baby Hummer](#) ή, για πιο εξειδικευμένα άτομα, η γενικότερη περίπτωση της [αρχής Hummer](#)), ή για την εύρεση στρατηγικών νίκης σε πολλά παιχνίδια (π.χ. το NIM). Η [έκδοση του NIM στο Marienbad](#) αποτελεί ένα θαυμάσιο παράδειγμα του πώς οι έννοιες της συμμετρίας και της ισοδυναμίας (εφαρμοσμένες στο δυαδικό σύστημα) σας επιτρέπουν να κερδίζετε σε κάθε παιχνίδι.

Selfies στην Παραλία

Όσον αφορά τη θέση και την τοποθέτηση των αντικειμένων στο χώρο, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να αντιστοιχίσουν συγκεκριμένες φράσεις με τη θέση των αντικειμένων στην εικόνα. Ένα παράδειγμα αυτού θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε και να βρούμε ποια αντικείμενα βρίσκονται μπροστά από το κάθε αντικείμενο/στοιχείο. Επεκτείνοντας αυτή τη δραστηριότητα, το εργαλείο Geoboard θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη χαρτογράφηση της θέσης των ζώων σε μια μεταξύ τους σχέση, ως έναν τρόπο εμπλοκής κι εξοικείωσης μ' ένα καρτεσιανό πλέγμα συντεταγμένων.

Επιπλέον, διάφορα αντικείμενα που βρίσκονται στην τάξη θα μπορούσαν να τοποθετηθούν με τρόπο ώστε να δημιουργηθεί μια φωτογραφική σκηνή, όπου οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν την φωτογραφία την οποία συνοδεύει το έκθεμα ως πρότυπο για να τραβήξουν φωτογραφίες από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Για τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας, αυτή η δραστηριότητα μπορεί επίσης να περιλαμβάνει τη διάσταση του φωτός ώστε να μάθουν και να κατανοήσουν περισσότερα σχετικά με τις γωνίες (από πού προέρχεται το φως, λαμβάνοντας υπόψη τις σκιές που προκύπτουν από διαφορετικές πηγές φωτός).

Τραβώντας την ίδια φωτογραφία από διαφορετικές θέσεις μέσα στην τάξη, οι μαθητές μπορούν στη συνέχεια να μαντέψουν από ποιο σημείο αυτές τραβήχτηκαν οι φωτογραφίες αυτές (π.χ. αυτή τραβήχτηκε από την αριστερή πλευρά της τάξης ή από το πίσω μέρος της τάξης).

Μπορούν επίσης να δοκιμάσετε να κάνετε λήψη της ίδιας φωτογραφίας σε διαφορετικές αναλογίες (1:1, 3:4, 9:16) και να συζητήσετε για το πώς αυτό επηρεάζει την τελική φωτογραφία όσον αφορά τ' αντικείμενα που περιλαμβάνονται σ' αυτήν.

Διαδρομές

Η έννοια της διαδρομής είναι από τις πρώτες έννοιες που συναντούν τα παιδιά καθώς εξερευνούν και περιηγούνται στο περιβάλλον τους. Τα ορατά μονοπάτια που δημιουργούν τα παιδιά μπορεί να περιλαμβάνουν ίχνη από ξυλάκια με τα οποία σχεδιάζουν στην άμμο, μουτζούρες που κάνουν σε χαρτί ή υγρά ίχνη που αφήνει ένα σπασμένο μπουκάλι νερού όταν αυτό μετακινείται - οι δυνατότητες είναι πραγματικά απεριόριστες! Μπορεί να παρατηρήσουν διαδρομές που σχηματίζονται από πυροτεχνήματα, αεροπλάνα, διάττοντες αστέρες, χνάρια ζώων και χειρόγραφα, καθώς επίσης να σκεφτούν ακόμη και την έννοια των διαδρομών που δεν αφήνουν ορατά ίχνη.

Σε διάφορα περιβάλλοντα, μια διαδρομή καθορίζει μια περιοχή όπου η κίνηση είναι δυνατή: μπορεί κανείς να διασχίσει έναν δρόμο ή μια δασική διαδρομή ή να περπατήσει σ' ένα πεζοδρόμιο, αλλά όχι μέσα από τοίχους ή κτίρια. Τα μονοπάτια του δάσους και της υπαίθρου καθοδηγούν την κίνησή μας, προειδοποιώντας μας να μην περιπλανηθούμε σε δάση ή σε λιβάδια, που ενδεχομένως θα μας οδηγούσε στο να χαθούμε. Υπάρχει μια διαδρομή μεταξύ σπιτιού και σχολείου που μπορείτε να μάθετε και μερικές φορές θα μπορούσατε να επιστρέψετε από το σχολείο χρησιμοποιώντας διαφορετική διαδρομή, παρά το γεγονός ότι η αφετηρία και τα τελικά σημεία παραμένουν τα ίδια. Η εκμάθηση μιας διαδρομής απαιτεί την παροχή κατευθυντήριων οδηγιών: μετακίνηση προς τα εμπρός, στροφή προς τα δεξιά, πλοήγηση ανάμεσα σ' εμπόδια ή οπισθοδρόμηση σε περίπτωση που συναντούμε ένα εμπόδιο όπως ένας φράχτης ή μια κλειστή πόρτα.

Ενώ αποτελεί μια διαισθητική έννοια, ο ορισμός της έννοιας της διαδρομής περιλαμβάνει δύο συμπληρωματικές προοπτικές: πρώτον, ένας δυναμικός ορισμός ερμηνεύει μια διαδρομή ως την τροχιά ενός κινούμενου αντικειμένου (το οποίο μπορεί να μην αφήνει ορατά ίχνη). Κάθε κινούμενη οντότητα - πρόσωπο, ζώο, αυτοκίνητο - «χαράσσει» μια διαδρομή κατά τη διάρκεια της κίνησής της, η οποία απουσιάζει όταν η οντότητα αυτή παραμένει ακίνητη. Ένας στατικός ορισμός, από την άλλη πλευρά, ορίζει την έννοια της διαδρομής ως μια γραμμή (όχι απαραίτητα ευθεία) η οποία συνδέει δύο σημεία στο χώρο χωρίς ν' απαιτείται απαραίτητα κάποια κίνηση. Και οι δύο αυτοί ορισμοί υπάρχουν στα λεξικά, συχνά συνοδευόμενοι από πιο συμβολικές έννοιες. Από μαθηματικής άποψης, και οι δύο οπτικές γωνίες είναι ισοδύναμες: το σύνολο των σημείων που ένα αντικείμενο διασχίζει σχηματίζει μια καμπύλη, και, με δεδομένη μια καμπύλη, μπορούμε να κάνουμε ένα κινούμενο αντικείμενο να την ακολουθήσει. Ωστόσο, η εισαγωγή αυτής της έννοιας της δυαδικότητας στα παιδιά μπορεί να είναι συναρπαστική. Οι εκπαιδευτικοί ή οι γονείς μπορούν να πυροδοτήσουν συζητήσεις με τα παιδιά, θέτοντας το εξής ερώτημα: «Τι είναι μια διαδρομή;», παρουσιάζοντάς τους εναλλακτικές προοπτικές. Ο συνδυασμός αυτών των συζητήσεων με τις προτεινόμενες δραστηριότητες μπορεί να διευκολύνει την αποτελεσματικότερη κατανόηση της έννοιας από τα παιδιά.

Εκθέματα του έργου SMEM που σχετίζονται με την έννοια των Διαδρομών

Ο Περίπατος της Έμου

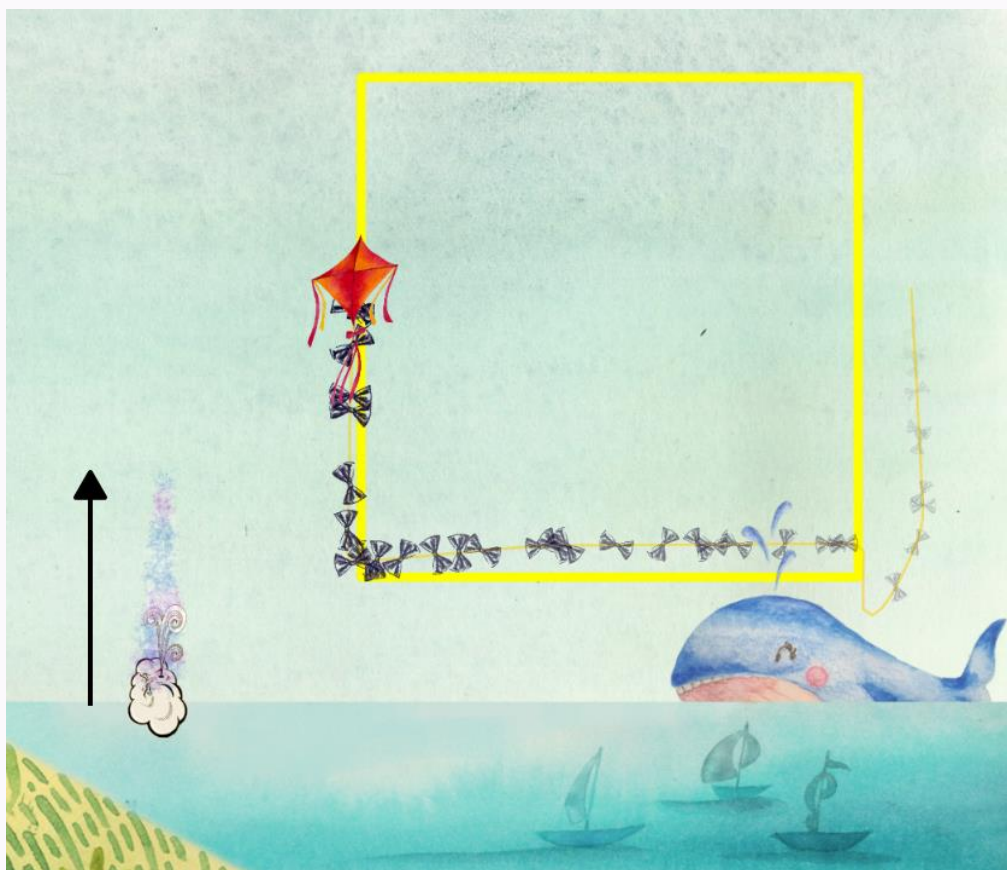
Η δυναμικός ορισμός της έννοιας της διαδρομής αποτελεί μια καλή περιγραφή της χρησιμοποιώντας μια σειρά οδηγιών: το ν' ακολουθεί κανείς οδηγίες βήμα προς βήμα ενώ βρίσκεται σε κίνηση περιγράφει μια διαδρομή. Αυτή η προοπτική εκφράζεται καταπληκτικά στο έκθεμα με την ονομασία «*Ο Περίπατος της Έμου μέσα στο Δάσος*». Το έκθεμα αυτό περιλαμβάνει μια σκακιέρα με αριθμημένα και χρωματιστά τετράγωνα (βλ. εικόνα). Καθένα από τα τέσσερα χρώματα κατευθύνει την κίνηση προς μια συγκεκριμένη πλευρά και ο αριθμός δείχνει κατά πόσα τετράγωνα πρέπει να

από, προς τα εμπρός και προς τα πίσω) και οι συζητήσεις σχετικά με τις διατάξεις των διαδρομών μπορούν να εμπλουτίσουν την εμπειρία.

Όσον αφορά τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας (8+), μπορείτε να τα ενθαρρύνετε να δημιουργήσουν τη δική τους σκακιέρα. Θα μπορούσατε να το κάνετε αυτό από την αρχή χρησιμοποιώντας χαρτί ή έτοιμα τετράγωνα τα οποία είναι ήδη χρωματισμένα και στα οποία αναγράφονται ήδη οι αριθμοί. Θα μπορούσατε επίσης να τροποποιήσετε τις οδηγίες. Για παράδειγμα, θα μπορούσατε να τους δώσετε τις εξής οδηγίες: «Ο σχεδιασμός του περιπάτου σας στο δάσος θα πρέπει να καθιστά δυνατό να διανύσει κανείς δύο, τρία ή τέσσερα ξεχωριστά κυκλικά μονοπάτια». Για να ξεκινήσετε τη δραστηριότητα, θα μπορούσατε να συμπληρώσετε εκ των προτέρων εν μέρει τη διάταξη, αφήνοντας μερικά κενά για εξερεύνηση και σχεδιασμό.

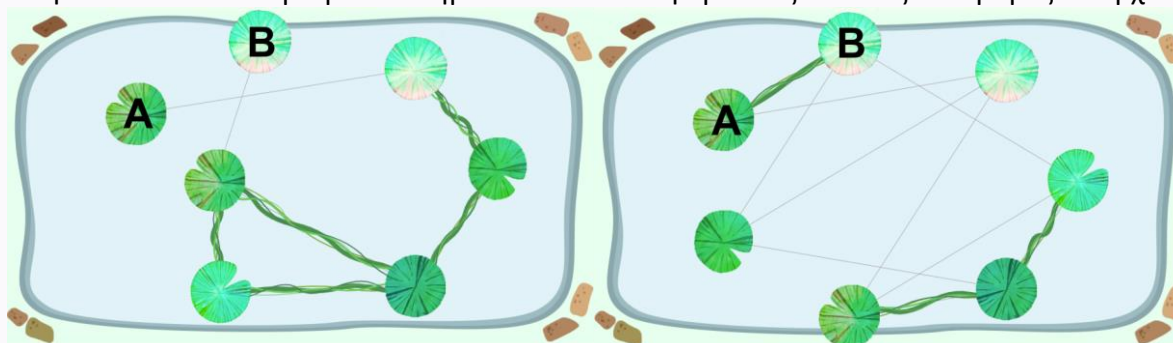
Καρδιά στον Ουρανό

Στο εικονικό έκθεμα με την ονομασία «Καρδιά στον Ουρανό», τα παιδιά ελέγχουν έναν ιπτάμενο χαρταετό προκειμένου να εντοπίσουν ένα προκαθορισμένο σχήμα στον ουρανό. Ενώ το σχήμα-στόχος αντιπροσωπεύει μια «στατική» διαδρομή, η τροχιά του χαρταετού ενσωματώνει μια «δυναμική» διαδρομή. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η κίνηση του χαρταετού, παρά το γεγονός ότι είναι δυναμική, αφήνει ένα ίχνος στην οθόνη, μετατρέποντας ουσιαστικά τη δυναμική διαδρομή σε στατική. Στο σημείο αυτό, το έκθεμα δίνει έμφαση στην κατεύθυνση ανεξάρτητα από τη διαδρομή. Αντί να ελέγχουν άμεσα τον χαρταετό, τα παιδιά τον καθοδηγούν έμμεσα, όντας σε θέση να ελέγξουν τον άνεμο που φυσά ανάμεσα στα σύννεφα, και ο οποίος προκαλεί την κίνηση του χαρταετού. Αυτή η ρύθμιση ενισχύει τις δεξιότητες συντονισμού ματιών-χεριών και χωρικού προσανατολισμού των παιδιών. Όπως έχει παρατηρηθεί στο προηγούμενο έκθεμα, οι κατευθυντήριες οδηγίες διαδραματίζουν καίριο ρόλο στον καθορισμό της διαδρομής. Επιπλέον, εισάγουμε την έννοια της ταχύτητας: η κατεύθυνση του ανέμου δείχνει επίσης την κατεύθυνση της κίνησης του χαρταετού, ενώ το μήκος του αντιπροσωπεύει την ταχύτητα. Μαζί, η κατεύθυνση και η ταχύτητα σχηματίζουν το διάνυσμα της ταχύτητας του κινούμενου χαρταετού, το οποίο πάντα εφάπτεται στο μονοπάτι.



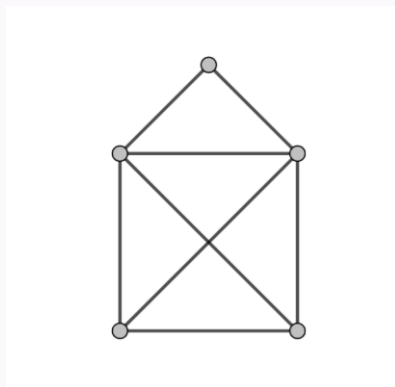
Λίμνη με Νούφαρα

Στο εικονικό έκθεμα με την ονομασία «Λίμνη με Νούφαρα», οι διαδρομές προκύπτουν συνδέοντας νούφαρα μεταξύ τους με τη χρήση ευθύγραμμων τμημάτων. Αυτό το έκθεμα διευρύνει την έννοια των μονοπατιών στην έννοια των γραφήματων: τα νούφαρα αντιπροσωπεύουν κορυφές και οι συνδέσεις που δημιουργούν σχηματίζουν τις κορυφές ενός γραφήματος. Κάθε κορυφή συνδέει σταθερά δύο κορυφές, διασφαλίζοντας ότι δεν υπάρχουν αποσυνδεδεμένες ή απομακρυσμένες κορυφές, ή ότι υπάρχει μη συνδεδεμένη κορυφή. Οι κορυφές μπορούν να χρησιμεύσουν τόσο ως σημεία εκκίνησης όσο και ως σημεία στα οποία καταλήγουν πολλαπλές κορυφές. Ορισμένες κορυφές ενδέχεται ακόμη να τέμνονται. Παρουσιαζόμενες ως λεπτές γραμμές, οι επικαλυπτόμενες άκριες απεικονίζονται ως λεπτές γραμμές, ενώ οι μη επικαλυπτόμενες άκριες εμφανίζονται ως πράσινα φύλλα. Ο αρχικός στόχος του παιχνιδιού είναι να ξεμπλεχτούν όλες οι κορυφές και να εξαλειφθούν όλες οι επικαλύψεις. Ωστόσο, τα γραφήματα που εμφανίζονται προσφέρουν την ευκαιρία να εξερευνησετε επιπλέον διαδρομές. Επιλέγοντας ένα γράφημα και επισημαίνοντας δύο νούφαρα ως A και B, μπορεί κανείς να διερευνήσει τις διάφορες πιθανές διαδρομές για τη σύνδεση αυτών των καθορισμένων σημείων. Πόσα διαφορετικές πιθανές διαδρομές υπάρχουν;



Ανάλογα με το επιλεγμένο γράφημα, το επίπεδο δυσκολίας αυτής της δραστηριότητας μπορεί να ποικίλει από εύκολο έως πιο περίπλοκο. Θα μπορούσατε να εισαγάγετε πρόσθετες προϋποθέσεις τις οποίες θα πρέπει να πληροί η διαδρομή για να ληφθεί υπόψη (όπως να μην τέμνονται μεταξύ τους οι γραμμές, να επιτρέπεται η μετακίνηση προς τα πίσω κ.λπ.). Εναλλακτικά, θα μπορούσατε να προκαλέσετε τους μαθητές να βρουν τη συντομότερη διαδρομή η οποία να συνδέει όλα τα νούφαρα μεταξύ τους, κάτι το οποίο καθιστά τη δραστηριότητα παρόμοια με το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή.

Μια άλλη συναρπαστική δραστηριότητα περιλαμβάνει τη σύνδεση όσο το δυνατόν περισσότερων νούφαρων ενώ χρησιμοποιείτε κάθε σκέλος μόνο μία φορά. Μερικές φορές, μπορεί να μην είναι εφικτό να συνδέσετε όλα τα νούφαρα μεταξύ τους. Η πρώτη εικόνα καταδεικνύει μια τέτοια περίπτωση. Στη συνέχεια, θα μπορούσατε να κάνετε ερωτήσεις παρακολούθησης στους μαθητές, όπως οι εξής: «Είναι εφικτό να συνδέσουμε όλα τα νούφαρα μεταξύ τους;», «Γιατί ναι ή γιατί όχι;», «Ποιες προϋποθέσεις πρέπει να πληρούνται για να συνδεθούν όλα μεταξύ τους;». Αυτά τα ερωτήματα καθιστούν τη δραστηριότητα πολύ παρόμοια με το διάσημο πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg. Τα παιδιά μπορεί επίσης να αναγνωρίσουν έναν παρόμοιο γρίφο στα πλαίσια του οποίου πρέπει να σχεδιάσουν μια διαδρομή σ' ένα γράφημα το οποίο μοιάζει με σπίτι, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Φιδάκι

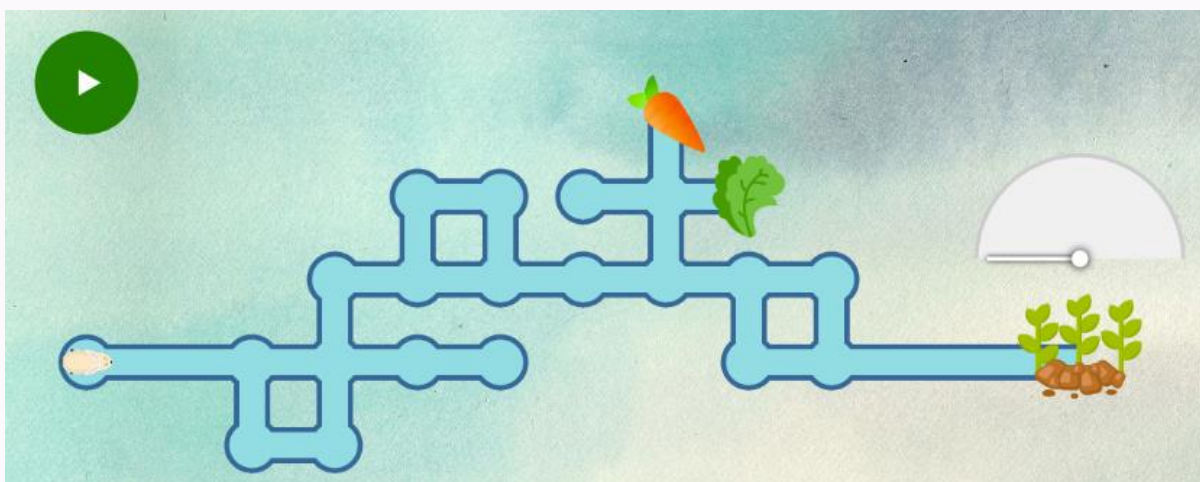
Καθώς το παιχνίδι «Φιδάκι» εξελίσσεται, το πiónι κάθε παίκτη θα «χαράσσει» μια διαδρομή κατά μήκος του ταμπλό. Στην πραγματικότητα, μια διαδρομή που προκύπτει από το παιχνίδι παράγει αυτόματα ένα γράφημα (δείτε την προηγούμενη παράγραφο στο έκθεμα με την ονομασία «Λίμνη με Νούφαρα»). Η εικόνα δείχνει ένα παράδειγμα διαδρομής για κάθε έκδοση του παιχνιδιού.

Θα μπορούσατε να ρωτήσετε τα παιδιά πόσο μεγάλη ήταν η διαδρομή του πιονιού τους. Για την έκδοση του παιχνιδιού με τα νομίσματα, το μήκος της διαδρομής καθορίζεται από τον αριθμό των στροφών που ο παίκτης χρειάστηκε για να ολοκληρώσει το παιχνίδι, ενώ για την έκδοση με τα ζάρια, το μήκος της διαδρομής θα είναι πάντα το ίδιο: το μήκος του φιδιού (αριθμός των πεδίων). Σε περίπτωση που η διαδρομή υπερβαίνει το εύρος μέτρησης των παιδιών, μπορούν να τη σχεδιάσουν σε χαρτί με πλέγμα, χρησιμοποιώντας τα τετράγωνα ως μονάδες μέτρησης.



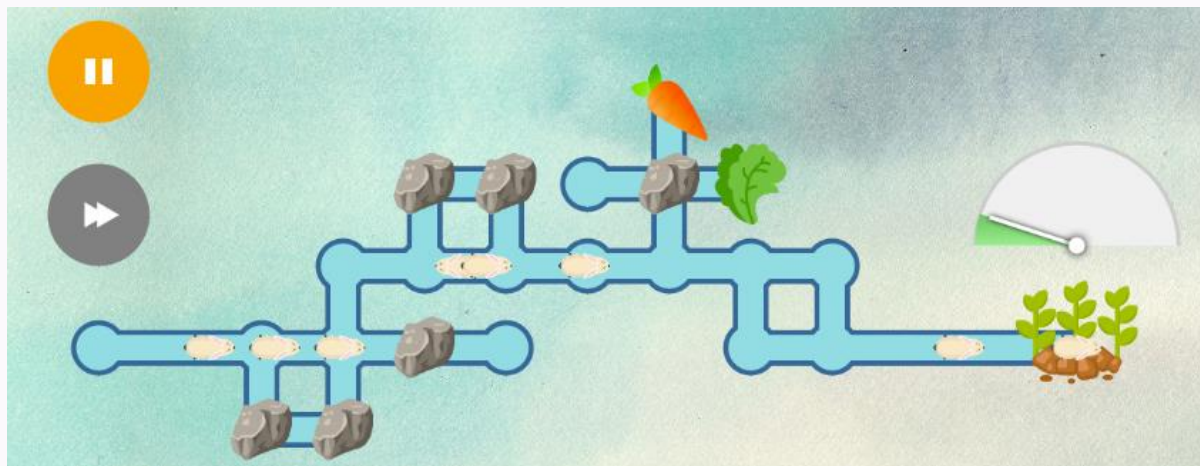
Ο Λαβύρινθος των Κουνελιών

Ο σχεδιασμός κάθε σταδίου εντός του εικονικού εκθέματος με την ονομασία «Ο Λαβύρινθος των Κουνελιών» σχηματίζει ένα γράφημα που περιλαμβάνει κορυφές (στρογγυλές περιοχές ή διασταυρώσεις) και άκρες (συνδέσεις μεταξύ αυτών των στρογγυλεμένων περιοχών). Ακολουθεί ένα παράδειγμα:



Τα κουνέλια πλοηγούνται στο γράφημα, το καθένα ακολουθώντας τη μοναδική του διαδρομή. Κάθε μονοπάτι ξεκινά από την αριστερή πλευρά της οθόνης, καταλήγοντας είτε στην κουνελότρυπα στη δεξιά πλευρά, σ' ένα καρότο ή σ' ένα λάχανο. Αυτές οι διαδρομές μπορεί να διαφέρουν σε μήκος και μπορεί να περιέχουν πολλαπλούς βρόχους (loops).

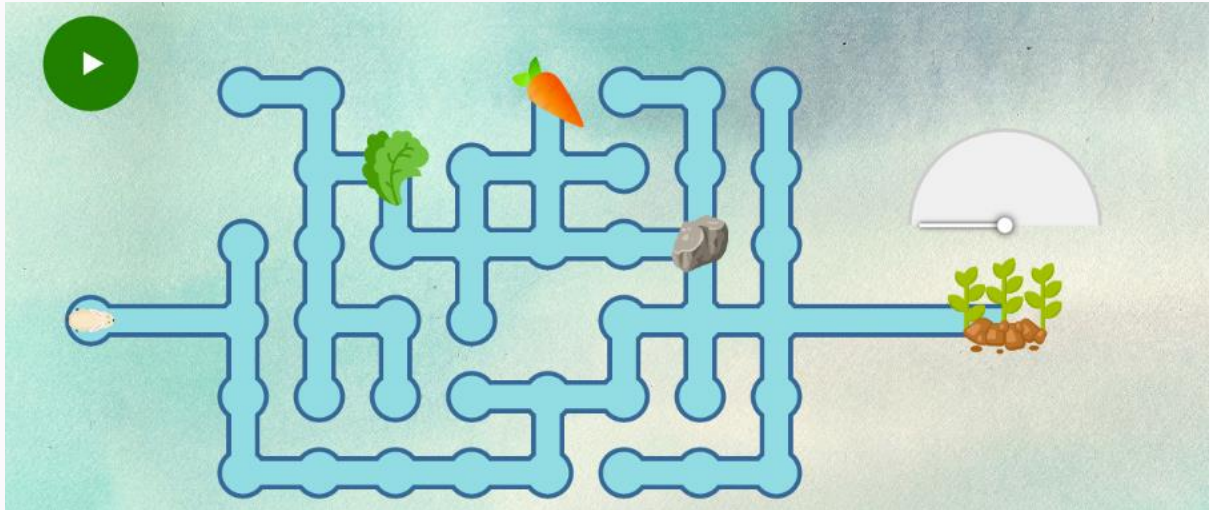
Ο στόχος είναι να τροποποιηθεί το γράφημα τοποθετώντας στρατηγικά βράχους στις κορυφές για να διασφαλιστεί ότι όσο το δυνατόν περισσότερα κουνέλια θα φτάσουν στην κουνελότρυπα στο τέλος του μονοπατιού.



Τα κουνέλια μπορούν να κινηθούν κατά μήκος των άκρων που οδηγούν σε έναν βράχο, αλλά θα αναγκαστούν να αντιστρέψουν την κατεύθυνσή τους όταν φτάσουν σ' αυτόν. (Σημείωση: Αυτή η συμπεριφορά διαφέρει από εκείνη ενός μαθηματικού γραφήματος, καθώς το υπόλοιπο άκρο στερείται μιας κορυφής στο ένα άκρο.) Μπορείτε ν' αποκλείσετε και τις τρεις επιλογές τερματισμού, με αποτέλεσμα να παίζεται ένα παιχνίδι το οποίο δεν πρόκειται να τελειώσει. Οι πέτρες μπορούν επίσης να εξασφαλίσουν ορισμένες παρακάμψεις, βοηθώντας έτσι τα κουνέλια να φτάσουν πιο γρήγορα στη φωλιά τους (όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο οθόνης που παρέχεται, στο οποίο μόνο μία πέτρα αποτελεί εμπόδιο προς το καρότο και το λάχανο. Οι άλλες πέντε δεν είναι απαραίτητες για την επίτευξη του στόχου, αλλά επιταχύνουν τον τερματισμό των κουνελιών).

Στην περίπτωση των παιδιών, οι αρχικές ερωτήσεις που θα μπορούσατε να τους υποβάλετε σχετικά με το γράφημα (πριν από την τοποθέτηση βράχων) μπορεί να μοιάζουν μ' εκείνες που παρέχονται ως εισήγηση στο παιχνίδι με τα νούφαρα: «Πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορούν να ακολουθήσουν τα κουνέλια;» ή «Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή;» κ.λπ. Η εύρεση της συντομότερης διαδρομής θα βοηθήσει στην τοποθέτηση των βράχων για την επίτευξη αρχικού στόχου του παιχνιδιού.

Στη συνέχεια, θα μπορούσατε να ρωτήσετε τα παιδιά ποια είναι η βέλτιστη τοποθέτηση των βράχων για την επίτευξη του στόχου του παιχνιδιού. Επίσης, λάβετε υπόψη τον ελάχιστο αριθμό βράχων που απαιτούνται για την παρεμπόδιση όλων των περισπασμών και τη στρατηγική τοποθέτησή τους σ' ένα γράφημα με το οποίο παίζετε. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να εμποδίσετε δύο περισπασμούς με έναν μόνο βράχο, παρόλο που είναι εφικτό να εμποδίσετε κάθε περισπασμό ξεχωριστά χρησιμοποιώντας μεμονωμένες πέτρες.



Παράδειγμα ενός Εργαστηρίου βασισμένου στο έργο SMEM

Σε αυτή την ενότητα, θα διερευνήσουμε ένα συναρπαστικό εργαστήριο που βασίζεται σε δραστηριότητες από το έργο SMEM. Οι δραστηριότητες του έργου SMEM χρησιμεύουν ως έμπνευση για τη δημιουργία δυναμικών μαθησιακών εμπειριών τόσο στο πλαίσιο της τάξης, όσο και πέραν αυτού.

Ηλικία: 6-8 ετών

Εργαστήριο: Γεωμετρία και Χωρική Αντίληψη

Χώρος: Αίθουσα διδασκαλίας /περιβάλλον σπιτιού

Χρόνος που απαιτείται ανά δραστηριότητα: 20-25 λεπτά

Δραστηριότητες: Selfies στην Παραλία και Χωρική Αντίληψη
Διασκέδαση με Γεωμετρικά Σχήματα
Ανακαλύπτοντας Γεωμετρικά Μοτίβα μέσω της Κατασκευής

Απαιτούμενο υλικό: Κάμερες, εργαλείο geoboard, βοηθήματα διδασκαλίας σε γεωμετρικά σχήματα

Το εργαστήριο περιλαμβάνει: Αντιστοίχιση φράσεων με θέσεις αντικειμένων, κατανόηση καρτεσιανών εννοιών, εξερεύνηση σχημάτων και των ιδιοτήτων τους, δημιουργία πλατωνικών στερεών και πειραματισμός με γωνίες και με τον φωτισμό μέσω της φωτογραφικής τέχνης

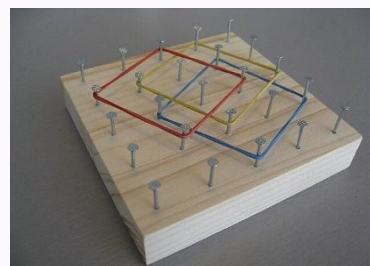
Μαθηματικά θέματα που καλύπτονται: γεωμετρία, χωρικές έννοιες, γωνίες, σχήματα

«Selfies στην Παραλία» και Χωρική Αντίληψη

Αυτή η δραστηριότητα επικεντρώνεται στην ενίσχυση της αντίληψης του χώρου και της αντίληψης της έννοιας της θέσης των παιδιών μέσω ενός συνδυασμού οπτικών δραστηριοτήτων και πρακτικής εξερεύνησης.

Στα παιδιά παρουσιάζονται εικόνες οι οποίες απεικονίζουν σκηνές σε παραλία, και οι οποίες περιλαμβάνουν διάφορα αντικείμενα. Τους ζητείται να αντιστοιχίσουν περιγραφικές φράσεις με τις αντίστοιχες θέσεις των αντικειμένων που περιλαμβάνονται στις σκηνές αυτές. Για παράδειγμα, φράσεις όπως «δίπλα από την φοινικιά», «πίσω από το καράβι» ή «μπροστά από τον φάρο» συνδυάζονται με τα αντίστοιχα αντικείμενα στις εικόνες. Αυτή η άσκηση βοηθά στην ενίσχυση της κατανόησης των τοπικών επιρρημάτων και της τοποθέτησης των αντικειμένων.

Για να εμβαθύνουν στις χωρικές έννοιες, γίνεται μια εισαγωγή των παιδιών στο Geoboards, το οποίο αποτελεί ένα απτικό εργαλείο που μοιάζει μ' ένα καρτεσιανό επίπεδο. Χρησιμοποιούν λαστιχάκια ή μανταλάκια για να δημιουργήσουν σχήματα ή σημεία σχεδίασης στο geoboard. Με αυτόν τον τρόπο, αποκτούν μια πρακτική κατανόηση των βασικών εννοιών των καρτεσιανών συντεταγμένων, όπως οι άξονες X και Ψ, οι συντεταγμένες και η τοποθέτηση αντικειμένων σε σχέση με τα σημεία του πλέγματος.



Το εργαστήριο κορυφώνεται με μια διασκεδαστική και διαδραστική φωτογραφική δραστηριότητα. Τα παιδιά χρησιμοποιούν κάμερες ή smartphones για να καταγράψουν εικόνες από διαφορετικές οπτικές γωνίες σ' ένα δωμάτιο - αεροφωτογραφίες, κοντινές λήψεις και πανοραμικές προβολές. Διερευνούν πώς η αλλαγή της οπτικής γωνίας μεταβάλλει την αντίληψη των θέσεων και των

μεγεθών των αντικειμένων στις εικόνες που φωτογραφίζουν. Ακολουθούν συζητήσεις, γεγονός το οποίο επιτρέπει στα παιδιά να εκφράσουν τις παρατηρήσεις τους σχετικά με τις επιδράσεις των ποικίλων προοπτικών στην τοποθέτηση αντικειμένων και την οπτική αντίληψη.

Καθ' όλη τη διάρκεια της δραστηριότητας, ο συντονιστής καθοδηγεί τις συζητήσεις, ενθαρρύνοντας τα παιδιά να διατυπώσουν την κατανόησή τους όσον αφορά την ορολογία με την οποία διατυπώνεται η θέση των αντικειμένων, να συνδέσουν μεταξύ τους τις διάφορες έννοιες, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο οι οπτικές και οι προοπτικές επηρεάζουν την τοποθέτηση των αντικειμένων. Αυτός ο ανοιχτός διάλογος ενθαρρύνει την κριτική σκέψη και επιτρέπει στα παιδιά να συνδέσουν τις πραγματικές τους παρατηρήσεις με τις αρχές της γεωμετρίας και της χρωμετρίας.

Συγκεκριμένα Παραδείγματα Υποδείξεων

1. Εισαγωγή στην έννοια των Συντεταγμένων

Ας επιστημόσουμε τις οριζόντιες γραμμές A, B, C και τις κάθετες γραμμές 1, 2, 3 για να δημιουργήσουμε το πλέγμα μας. Πώς μας βοηθά αυτό να εντοπίζουμε σημεία; Μπορείτε να σχεδιάσετε ένα σημείο στο A3; Ποιες συντεταγμένες θα χρησιμοποιούσατε για να σχεδιάσετε ένα σημείο στο πλέγμα;

2. Δημιουργία Σχημάτων και Σημείων Σχεδίασης

Συνδέστε τα σημεία που έχετε σχεδιάσει. Τι σχήμα έχετε δημιουργήσει; Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα τρίγωνο χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες D2, E4 και F3; Πώς θα σχεδιάζατε αυτά τα σημεία;

3. Κατανόηση των Κινήσεων και των Περιστροφών

Ας μετακινήσουμε το τετράγωνο δύο μονάδες προς τα δεξιά και τρεις μονάδες προς τα πάνω. Ποιες θα είναι οι νέες συντεταγμένες του; Περιγράψτε την κίνηση του σχήματος χρησιμοποιώντας συντεταγμένες. Πώς η αλλαγή των συντεταγμένων επηρέασε τη θέση του σχήματος;

4. Ανάλυση των Σχέσεων μεταξύ των Συντεταγμένων

Τι θα συμβεί αν αλλάξετε τη δεύτερη συντεταγμένη διατηρώντας την πρώτη σταθερή; Μπορείτε να εξηγήσετε πώς η αλλαγή της πρώτης συντεταγμένης μετακινεί το σχήμα οριζόντια ή πώς η αλλαγή της δεύτερης συντεταγμένης το μετακινεί κατακόρυφα;

5. Εξερεύνηση των Ιδιοτήτων των Σχημάτων και των Μετασχηματισμών

Τι θα συμβεί αν συνδέσουμε τα A1, A4, D4 και D1; Μπορείτε να περιγράψετε το σχήμα; Αν καθρεφτίσουμε αυτό το σχήμα κατά μήκος της κατακόρυφης γραμμής στη συντεταγμένη B, με τι θα μοιάζει;

6. Εφαρμογές υπό Πραγματικές Συνθήκες

Πώς μπορεί η κατανόηση των συντεταγμένων να μας βοηθήσει να πλοηγηθούμε σε μια πόλη ή να εντοπίσουμε αντικείμενα σ' έναν χάρτη; Μπορείτε να σκεφτείτε καταστάσεις όπου η γνώση του τρόπου χρήσης των συντεταγμένων μπορεί να είναι χρήσιμη;

Αυτές οι συζητήσεις και οι καθοδηγούμενες ερωτήσεις αποσκοπούν στην κατανόηση των καρτεσιανών εννοιών από τα παιδιά, ενθαρρύνοντάς τα να σκεφτούν κριτικά, να διατυπώσουν τις παρατηρήσεις τους και να συσχετίσουν αυτές τις έννοιες με σενάρια του πραγματικού κόσμου. Η

καθοδήγηση του συντονιστή προτρέπει τα παιδιά να εξερευνήσουν και να απεικονίσουν τις γεωμετρικές έννοιες αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας στυλό και χαρτί.

Καθώς η δραστηριότητα ολοκληρώνεται, μια συνεδρία αναστοχασμού ενθαρρύνει τα παιδιά να μοιραστούν τις ιδέες και τα συμπεράσματά τους. Συζητούν πώς εξελίχθηκε η κατανόησή τους για τη χωρική τοποθέτηση και πώς αυτή η νέα γνώση θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε σενάρια στην πραγματική ζωή, ενισχύοντας την κατανόησή τους για τις γεωμετρικές και χωρικές έννοιες.

Αυτή η διευρυμένη δραστηριότητα δίνει έμφαση στη χρήση οπτικών εικόνων, απτικών εργαλείων όπως τα geoboard και της φωτογραφικής τέχνης για την ενίσχυση της χωρικής αντίληψης των παιδιών, την ενίσχυση της κατανόησής τους όσον αφορά τις έννοιες της θέσης και τη συμμετοχή σε συζητήσεις σκοπός των οποίων είναι η γεφύρωση της οπτικής αντίληψης και γεωμετρικών και χωρομετρικών αρχών.

Εναλλακτική Δραστηριότητα: Καρτεσιανές Έννοιες με τη χρήση Στυλό και Χαρτιού

Αυτή η τροποποιημένη δραστηριότητα επικεντρώνεται στην εισαγωγή των παιδιών σε βασικές καρτεσιανές έννοιες που αφορούν τις συντεταγμένες χρησιμοποιώντας απλά εργαλεία όπως το χαρτί και τα μολύβια.

Στα παιδιά παρέχονται φύλλα χαρτιού και μολύβια. Ξεκινάνε σχεδιάζοντας ένα πλέγμα στο χαρτί - μια σειρά από οριζόντιες και κάθετες γραμμές οι οποίες σχηματίζουν τετράγωνα. Ο εκπαιδευτικός τα καθοδηγεί στην επισήμανση των οριζόντιων γραμμών με γράμματα (Α, Β, Γ κ.λπ.) και των κάθετων γραμμών με αριθμούς (1, 2, 3 κ.λπ.), οι οποίες στο τέλος μοιάζουν μ' ένα απλοποιημένο καρτεσιανό επίπεδο.

Χρησιμοποιώντας αυτό το αυτοσχέδιο πλέγμα, τα παιδιά εξασκούνται στη σχεδίαση σημείων επιλέγοντας συντεταγμένες (π.χ. Α3, Β4) και σημειώνοντάς τες στο πλέγμα. Συνεχίζουν να συνδέουν αυτά τα σημεία για να δημιουργήσουν σχήματα όπως τετράγωνα, ορθογώνια, τρίγωνα ή άλλα πιο σύνθετα σχέδια. Το να τα ενθαρρύνετε να πειραματιστούν με διαφορετικές συντεταγμένες ενισχύει την κατανόησή τους για το πώς οι συντεταγμένες καθορίζουν τις θέσεις και τα σχήματα στο πλέγμα.

Για να κατανοήσουν περαιτέρω τις έννοιες της θέσης, τα παιδιά συμμετέχουν σε δραστηριότητες που περιλαμβάνουν σχήματα τα οποία οι μαθητές μετακινούν εντός του πλέγματος. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να τους δώσει οδηγίες να σύρουν ένα σχήμα (π.χ. ένα τετράγωνο) από τη μία θέση στην άλλη, καθορίζοντας συντεταγμένες για τη νέα του θέση. Αυτή η άσκηση ενισχύει την ιδέα του πώς η αλλαγή συντεταγμένων οδηγεί σε μετατοπίσεις ή μεταφορές αντικειμένων σ' ένα οπτικό επίπεδο.

Καθώς τα παιδιά εργάζονται στα πλέγματά τους, ο εκπαιδευτικός πυροδοτεί συζητήσεις για να διερευνήσει τις σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων, καθώς και των κινήσεων και των σχημάτων που προκύπτουν. Ερωτήσεις όπως, «Πώς επηρεάζουν οι αλλαγές στις συντεταγμένες τη θέση του σχήματος;» ή «Μπορείτε μήπως να περιγράψετε την κίνηση από το σημείο Α στο σημείο Β χρησιμοποιώντας συντεταγμένες;» ενθαρρύνουν την κριτική σκέψη των μαθητών, ενώ παράλληλα και ενισχύσουν την κατανόησή τους όσον αφορά τις χωρικές έννοιες.

Προς το τέλος της δραστηριότητας, μια συνεδρία αναστοχασμού ενθαρρύνει τα παιδιά να μοιραστούν τις εμπειρίες και τις παρατηρήσεις τους. Συζητούν πώς η ενασχόλησή τους με συντεταγμένες και σχήματα στο χαρτί τους βοήθησε να απεικονίσουν τις διάφορες σχέσεις θέσης που υπάρχουν και να κατανοήσουν τις βασικές καρτεσιανές έννοιες. Ο εκπαιδευτικός τους ενθαρρύνει να σκεφτούν πρακτικές εφαρμογές αυτών των εννοιών σε καθημερινά σενάρια.

Διασκέδαση με Γεωμετρικά Σχήματα

Αυτή η δραστηριότητα επικεντρώνεται στην ενίσχυση της κατανόησης και στην προώθηση της εξερεύνησης των διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων, των ιδιοτήτων τους και των σχέσεών τους από τα παιδιά.

Στα παιδιά παρουσιάζεται μια ποικιλία γεωμετρικών σχημάτων - κύκλοι, τετράγωνα, τρίγωνα, ορθογώνια, πεντάγωνα, εξάγωνα και τρισδιάστατα σχήματα όπως κύβοι, σφαίρες και πυραμίδες. Ο εκπαιδευτικός ξεκινά τη δραστηριότητα ενθαρρύνοντας την πρακτική εξερεύνηση και τη συζήτηση γύρω από αυτά τα σχήματα.

Συγκεκριμένα παραδείγματα τρόπων Καθοδήγησης και Συζητήσεων από τον Εκπαιδευτικό

1. Εισαγωγή στα Γεωμετρικά Σχήματα

Ας εξερευνήσουμε αυτά τα σχήματα μαζί. Τι παρατηρείτε για τις ιδιότητες ενός τετραγώνου έναντι ενός τριγώνου;

Πόσες πλευρές έχει ένα εξάγωνο; Μπορείς να τις μετρήσεις;

2. Πειραματισμός με τα Σχήματα και τις Ιδιότητές τους

Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα σχήμα χρησιμοποιώντας τρίγωνα το οποίο να έχει τέσσερις πλευρές; Με ποιον τρόπο;

Τι συμβαίνει όταν προσπαθείτε να ταιριάξετε μεταξύ τους δύο τρίγωνα; Μπορείτε να τα κάνετε να σχηματίσουν ένα διαφορετικό σχήμα;

3. Συζήτηση με θέμα τη Συμμετρία και τα Μοτίβα

Ρίξτε μια ματιά σ' αυτό το μοτίβο από τετράγωνα και τρίγωνα. Μπορείτε να αναγνωρίσετε τα επαναλαμβανόμενα στοιχεία;

Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα συμμετρικό σχήμα χρησιμοποιώντας μόνο κύκλους και τετράγωνα;

4. Εξερεύνηση Τρισδιάστατων Σχημάτων

Ας εξερευνήσουμε αυτά τα τρισδιάστατα σχήματα. Ποιες είναι οι διαφορές μεταξύ ενός κύβου και μιας σφαίρας;

Πόσες έδρες έχει μια πυραμίδα; Μπορείς να τις μετρήσεις;

5. Ανάλυση των Ιδιοτήτων ενός Σχήματος

Ποια σχήματα πιστεύετε ότι μπορούν να κυλήσουν; Μπορείς να εξηγήσεις γιατί συμβαίνει αυτό;

Τι είναι αυτό που κάνει ένα σχήμα «κανονικό»; Μπορείτε να βρείτε παραδείγματα κανονικών σχημάτων γύρω μας;

6. Συσχέτιση Σχημάτων με τον Πραγματικό Κόσμο

Μπορείτε να εντοπίσετε παραδείγματα γεωμετρικών σχημάτων στην τάξη ή στο σπίτι; Ας συζητήσουμε για τις ιδιοτητές τους.

Πώς τα διάφορα σχήματα που υπάρχουν παίζουν ρόλο στις δομές που βλέπουμε γύρω μας, όπως τα κτίρια ή τα έπιπλα;

7. Ενθάρρυνση της Δημιουργικής Εξερεύνησης

Δημιουργήστε ένα μοναδικό σχήμα χρησιμοποιώντας συνδυασμούς άλλων σχημάτων. Πώς μπορείτε να συνδυάσετε σχήματα για να δημιουργήσετε κάτι νέο;

Μπορείτε να εφεύρετε ένα νέο τρισδιάστατο σχήμα; Ποιες ιδιότητες θα είχε;

Αυτή η διευρυμένη δραστηριότητα στοχεύει στη συμμετοχή των παιδιών στην πρακτική εξερεύνηση, την κριτική σκέψη και τη βαθύτερη κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων και των ιδιοτήτων τους μέσα σ' ένα δυναμικό και διαδραστικό μαθησιακό περιβάλλον.

Ανακαλύπτοντας Γεωμετρικά Μοτίβα μέσω της Κατασκευής

Αυτή η δραστηριότητα προσκαλεί τα παιδιά σε μια πρακτική εξερεύνηση των γεωμετρικών μοτίβων μέσω οικοδομικών δομών χρησιμοποιώντας διάφορα βοηθήματα διδασκαλίας σε γεωμετρικά σχήματα. Η συνεδρία ξεκινά με μια σύντομη συζήτηση σχετικά με τα μοτίβα, τη συμμετρία και τη χρήση των σχημάτων στην κατασκευή.

Κάθε παιδί λαμβάνει ένα σύνολο «δομικών υλικών», όπως ξύλινα μπλοκ, μαγνητικά πλακίδια ή κύβους οι οποίοι αλληλοσυνδέονται. Ο εκπαιδευτικός τοποθετεί τα υλικά σε προσβάσιμους σταθμούς, εξασφαλίζοντας ένα ευρύ φάσμα σχημάτων – τετράγωνα, ορθογώνια, τρίγωνα και εξάγωνα – τα οποία είναι διαθέσιμα προς εξερεύνηση.

Τα παιδιά ασχολούνται με την κατασκευή γεωμετρικών μοτίβων, αναπαράγοντας και επεκτείνοντας τα δεδομένα μοτίβα ή δημιουργώντας τα δικά τους. Ο εκπαιδευτικός τους προτρέπει να πειραματιστούν με συμμετρικά σχέδια, εναλλασσόμενα σχήματα και να δημιουργήσουν ακολουθίες που επαναλαμβάνονται ή που αναπτύσσονται προοδευτικά και θέτουν ερωτήσεις που προκαλούν τη σκέψη των μαθητών ώστε να τους ωθήσουν να εμβαθύνουν την κατανόησή τους. Τα παιδιά ενθαρρύνονται να διατυπώσουν τους κανόνες που διέπουν τα μοτίβα τους, να συζητήσουν σχετικά με τη συμμετρία τους, να διερευνήσουν τη σχέση μεταξύ των σχημάτων και να προσδιορίσουν τις ακολουθίες που υπάρχουν στα σχέδιά τους.

Υποδείξεις και Κατευθυντήριες Ερωτήσεις

1. Αναπαραγωγή Μοτίβων

Μπορείτε να αναδημιουργήσετε αυτό το μοτίβο χρησιμοποιώντας διαφορετικά σχήματα;
Πόσες φορές επαναλαμβάνεται το μοτίβο;
Μπορείτε να επεκτείνετε αυτό το μοτίβο για το κάνετε να καλύψει μεγαλύτερη περιοχή; Θα μπορούσατε να το κάνετε πιο μακρύ ή πιο πλατύ;

2. Δημιουργία Συμμετρικών Σχεδίων:

Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα μοτίβο που είναι συμμετρικό κατά μήκος μιας γραμμής;
Πώς μπορείτε να αντιγράψετε αυτό το σχήμα για να δημιουργήσετε συμμετρία;
Μπορείτε να κάνετε την αριστερή πλευρά του μοτίβου σας να μοιάζει με τη δεξιά πλευρά;

3. Πειραματισμός με Αλληλουχίες

Τι είναι αυτό που πρόκειται ν' ακολουθήσει στα μοτίβα σας;
Μπορείτε να δημιουργήσετε μια αναπτυσσόμενη ακολουθία προσθέτοντας ένα ακόμη σχήμα κάθε φορά;
Πώς θα μπορούσατε ν' αλλάξετε την ακολουθία για να διπλασιάσετε τον αριθμό των σχημάτων κάθε φορά;

4. Αναγνώριση των Σχέσεων μεταξύ των Σχημάτων

Πώς αποφασίζετε ποια θα είναι η διαδοχή των σχημάτων στο μοτίβο σας;
Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα μοτίβο στο οποίο κάθε σχήμα έχει το μισό μέγεθος του προηγούμενου;
Τι θα συμβεί εάν περιστρέψετε ή αναστρέψετε τα σχήματα στο μοτίβο σας;

5. Ενθάρρυνση της Ποικιλομορφίας και της Πολυπλοκότητας

Μπορείτε να τροποποιήσετε το μοτίβο σας για να συμπεριλάβετε σ' αυτό περισσότερα σχήματα;

Τι θα συμβεί εάν συνδυάσετε διαφορετικά σχήματα στο μοτίβο σας;

Πώς μπορείτε να κάνετε το μοτίβο σας πιο περίπλοκο;

6. Συζήτηση των Ιδιοτήτων των Μοτίβων

Τι παρατηρείτε σχετικά με τις γωνίες ή τις πλευρές των σχημάτων στο μοτίβο σας;

Πόσες πλευρές έχουν τα σχήματα σας; Μήπως αυτό επηρεάζει το πρότυπό σας;

Μπορείτε να εξηγήσετε τη συμμετρία ή την επανάληψη που χρησιμοποιήσατε στο σχέδιό σας;

Η δραστηριότητα ενθαρρύνει ένα συνεργατικό περιβάλλον όπου τα παιδιά μοιράζονται τα πρότυπά τους, επιτρέποντάς τους να εντοπίζουν τους υποκείμενους κανόνες και να επεκτείνουν τις αλληλουχίες μες τρόπο συνεργατικό. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τον πειραματισμό, προκαλώντας τα παιδιά να δημιουργήσουν πιο σύνθετα μοτίβα και να εξερευνήσουν παραλλαγές.

Προς το τέλος της δραστηριότητας, διεξάγεται μια συνεδρία αναστοχασμού. Τα παιδιά παρουσιάζουν τις δημιουργίες τους, εξηγώντας τα μοτίβα που έχουν δημιουργήσει, συζητώντας τη συμμετρία, την επανάληψη και τις γεωμετρικές ιδιότητες που παρατηρήθηκαν. Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τις συζητήσεις προς την κατεύθυνση των μαθηματικών αρχών που διέπουν τα πρότυπά τους.

Καθώς το εργαστήριο πλησιάζει στο τέλος του, τα παιδιά ενθαρρύνονται να πάρουν στο σπίτι τους τα διδακτικά βοηθήματα, έχοντας έτσι την ευκαιρία να κάνουν συνεχή εξερεύνηση των γεωμετρικών μοτίβων. Ο εκπαιδευτικός κάνει στους μαθητές διάφορες προτάσεις όσον αφορά τους τρόπους εξάσκησης της δημιουργίας μοτίβων στο σπίτι, προωθώντας έτσι ένα συνεχές ενδιαφέρον για τις γεωμετρικές έννοιες.



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Το έργο SMEM συγχρηματοδοτείται από το πρόγραμμα ERASMUS+ της Ευρωπαϊκής Ένωσης, και υλοποιείται από τον Ιανουάριο του 2022 μέχρι τον Ιανουάριο του 2024. Το παρόν έγγραφο αντικατοπτρίζει τις απόψεις και τις γνώμες του/των συγγραφέα/ων, και η Ευρωπαϊκή Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των γήεροφοριών που περιέχονται σ' αυτό.
[Αριθμός Έργου: KA220-BE-21-24-32460]

IMAGINARY
open mathematics

mathematikum
Mathematik zum Anfassen.



FERMAT SCIENCE
Une autre idée des maths



mmaca

Museu
de Matemàtiques
de Catalunya