



Даља истраживања

приручник

(верзија 1.0)



Sufinansira
Evropska unija

Садржај

УВОД	3
БАЛАНС И РАВНОТЕЖА	5
ШТА СЕ КРИЈЕ ИЗА КУЛИСА	5
ЕКСПОНАТИ ИЗ ПРОЈЕКТА СМЕМ КОЈИ СУ ЗАСНОВАНИ НА ИДЕЈИ ТЕЖИШТА	8
ВЕЗА С НАСТАВНИМ ПЛАНОМ И ПРОГРАМОМ	12
ОГЛЕДАЛА И СИМЕТРИЈА	14
КОЈЕ ИДЕЈЕ КРИЈЕ СИМЕТРИЈА	14
ВЕЗА С НАСТАВНИМ ПЛАНОМ И ПРОГРАМОМ	17
ЕКСПОНАТИ ИЗ ПРОЈЕКТА СМЕМ КОЈИ СУ ЗАСНОВАНИ НА СИМЕТРИЈИ	18
ПРИМЕРИ АКТИВНОСТИ КОЈЕ КОРИСТЕ ИСТЕ МАТЕРИЈАЛЕ	26
ЗАКЉУЧАК	27
УКЛАПАЊЕ ОБЛИКА	30
ДЕФИНИЦИЈА УКЛАПАЊА ОБЛИКА	30
ВЕЗА С НАСТАВНИМ ПЛАНОМ И ПРОГРАМОМ	31
ЕКСПОНАТИ ИЗ ПРОЈЕКТА СМЕМ КОЈИ СУ ЗАСНОВАНИ НА УКЛАПАЊУ ОБЛИКА	33
НЕКЕ МОГУЋЕ ВЕЗЕ МЕЂУ ЕКСПОНАТИМА	33
ПРИМЕРИ АКТИВНОСТИ КОЈЕ КОРИСТЕ ИСТЕ МАТЕРИЈАЛЕ	34
ЗАКЉУЧАК	35
ПОСМАТРАЊЕ И БРОЈАЊЕ	37
МАТЕМАТИЧКЕ ИДЕЈЕ ПОСМАТРАЊА И БРОЈАЊА НАМЕЊЕНИ ДЕЦИ	37
ВЕЗА С НАСТАВНИМ ПЛАНОМ И ПРОГРАМОМ	39
ЕКСПОНАТИ ИЗ ПРОЈЕКТА СМЕМ ЗАСНОВАНИ НА БРОЈАЊУ И ПОСМАТРАЊУ	39
ПУТАЊЕ	48
ДЕФИНИЦИЈА ПУТАЊЕ	48
ЕКСПОНАТИ ИЗ ПРОЈЕКТА СМЕМ КОЈИ СУ ЗАСНОВАНИ НА ИДЕЈИ ПУТАЊЕ	48
ПРИМЕР РАДИОНИЦЕ ЗАСНОВАНЕ НА ПРОЈЕКТУ СМЕМ	54

Ова књижица је настала на енглеском језику као резултат заједничких напора свих партнера на пројекту. Доступни су преводи на шпански, немачки, француски, грчки, каталонски и хрватски.

Превод на српски језик: Александра Равас

Стручна редакција српског текста: Драгана Стошић Миљковић

Овај рад је лиценциран под условима CC BY-SA 4.0.

Укратко: можете слободно умножавати, дистрибуирати, јавно саопшавати и прерађивати дело, под условом да на одговарајући начин наведете аутора и да га дистрибуирате само под лиценцама које су компатибилне с овом.

Увод

Математика заузима кључну позицију у скупу школских предмета обухваћених скраћеницом STEAM (*Science, Technology, Engineering, Art and Math*, то јест: природни предмети, техника, инжењерство, уметност и математика). Поред тога, од виталног је значаја за неговање интересовања за науку код младих. Наш пројекат, СМЕМ (Судбоносна Математика за најмлађе Математичаре), усвојио је вишедимензионални приступ. Циљ му је да уведе новине у методе подучавања математике, умањи јаз међу половима који је итекако присутан у STEAM оријентисаним каријерама, негује различита општа и интерперсонална знања и вештине и да промовише позитивну слику математике. Резултати пројекта намењени су деци узраста од три до осам година, њиховим васпитачима и наставницима као и свима заинтересованима да споје математику с игром. Пројекат приступа образовању на један неформалан начин, док етос пројекта једноставно гласи: „деца уче, а ми указујемо на пут“, чиме се подстиче циклус учења заснованог на искуству и посматрању: „укључи руке“, „укључи мозак“, „укључи срце“ и „укључи се у разговор“.

Приручници за мини-изложбу (ПР1) и дидактичко коферче (ПР2) пројекта СМЕМ нуде све потребне информације за организовање обе изложбе и осмишљених активности које се могу користити уз ове материјале. Приручници обухватају циљеве, садржај, динамику, међусобне везе и још понешто, и тако износе холистички педагошки предлог настао на основу нашег искуства и стручности у креирању иновативних активности и формата. Током стваралачког процеса више пута смо се суочили с примарним изазовима математичког образовања, почевши од сложености садржаја и језика, преко узајамног дејства физичких или виртуелних експоната, све до разраде концепата и подстицања развоја вештина. Поред свега тога, искуство које смо стицали током пројекта навело нас је на истраживање потенцијалне синергије између мануелних и виртуелних активности.

Књижицом коју тренутно држите у рукама, чији је назив „Даља истраживања“, желимо да наставимо дијалог покренут између партнера на пројекту и васпитача и наставника којима су наши предлози били довољно занимљиви да их пробају са својим ученицима.

Експонате настале у оквиру пројекта СМЕМ смо поделили у пет основних тема које имају за циљ развој математичког мишљења. Сваку од њих темељније истражујемо у посебном поглављу чиме смо, поред детаљнијег испитивања садржаја којима се тема бави, пружили васпитачима и наставницима прилику да унапреде своје знање и креативност. Осим тога, уврстили смо у текст додатне активности и савете које можете искористити за дизајнирање тематских мини-изложби или радионица усмерених на гајење тих специфичних аспеката математичког мишљења. Пет тема су:

- Равнотежа
- Огледала и симетрија
- Уклапање облика
- Посматрање и бројање
- Путање

Додатно, на крају приручника наћи ћете и поглавље *Пример радионице засноване на пројекту СМЕМ*.

Једнако као што наше изложбе и експонати имају за циљ да омогуће и подрже радостан и стимулативан доживљај открића код ученика, уверени смо да ће математичка и педагошка размишљања садржана у овој књижици понудити сличну прилику нашим колегама у настави: да се индивидуално укључе у образовна истраживања.

Да бисмо одржали паралелизам, баш као што нам је циљ да обогатимо еволутивни потенцијал активности намењених најмлађим ученицима који нису типични конзументи традиционалног математичког образовања (често се сматра да је оно намењено искључиво моћним и добро организованим умовима), чврсто верујемо да промишљања васпитача и наставника који свакодневно раде с децом у овој кључној образовној фази имају изузетну вредност и уздижу достојанство наше професије.



Баланс и равнотежа

Вештина постизања равнотеже и стање равнотеже представљају кључне елементе у развоју појединца, како нпр. у погледу стајања и координације тела, тако и при формирању интуитивног осећаја за физички свет. Све то стичемо и градимо не само кроз проучавање геометријских облика, већ и кроз посматрање како се ти облици понашају под утицајем физичких сила, а посебно гравитације.

За децу ће важан изазов бити повезивање апстрактних математичких концепата, као што су геометријски облици и бројевни просеци, с опипљивим појавама као што је одржавање предмета у равнотежи. Основне идеје на које се ослањамо су: да математика може објаснити физички свет око нас и да може служити као универзални језик за све науке. Иако није могуће директно пренети те идеје малој деци у фази развоја у којој им се обраћамо (пошто је за разумевање таквих филозофских разматрања потребан одређени ниво научне зрелости), појмови као што су равнотежа и тежиште служе као одличне полазне тачке за представљање назначених концепата млађој деци.

Основни појам који срећемо када проучавамо равнотежу јесте тежиште. Наше изложбе садрже више експоната осмишљених да укажу на корелацију између математичког одређивања просека и физичке равнотеже. Васпитачи и наставници могу да користе те експерименте прилагођавајући дате смернице узрасту и нивоу знања деце с којом раде. Старија деца могу постављати сопствене хипотезе, док ће их васпитачи и наставници усмеравати у том процесу и помагати им да боље разумеју суштину.

Шта се крије иза кулиса

Тежиште¹ је геометријска тачка која се може односити на фигуре у равни и на тела у простору. Може се дефинисати строго геометријским речником, али има и физичку интерпретацију која нам олакшава интуитивно разумевање.

Геометријски посматрано, тежиште је просечан положај свих тачака унутар фигуре, одређен искључиво у односу на њен облик.

Физички, тежиште је тачка у којој би се могла замислити скупљена маса свих тачака фигуре која је еквивалентна маси целе те фигуре коју разматрамо. Да будемо прецизнији, ако на тежиште применимо силу, тело ће добити линеарно убрзање без ротационе силе. Ова дефиниција користи физички концепт масе и индиректно подразумева силе попут гравитације.

Физичка дефиниција тежишта нам је вероватније ближа, јер се односи на идеју балансирања у равнотежном положају. Претпоставимо да нам је дата нека раванска фигура у свом физичком облику (на пример профил исечен од шперплоче). Можемо покушати да тај објект поставимо у равнотежу на врху кажипрста. Постоји једна јединствена тачка — тежиште — у којој се може постићи равнотежа. Према дефиницији, гравитација делује на фигуру као да је усмерена на тежиште (иако у стварности гравитација делује на све атоме који чине ту фигуру). Ако потпорна

¹ Понекад наилазимо на синониме центар масе или барицентар.

сила нашег прста делује у истој тачки (тежишту), онда се те силе поништавају и одржавају фигуру у равнотежи.

Геометријски метод одређивања тежишта може се спровести на следећи начин: требало би ухватити фигуру дуж неке од ивица и пустити је да слободно виси у простору. Када се стабилизује, повлачимо праву од тачке у којој је држимо вертикално према доле. Ова права представља путању коју тежиште прати под силом гравитације. Поновимо ли исти поступак с тачкама изабраним дуж осталих ивица фигуре, добићемо више правих које се секу. Својом тачком пресека оне одређују тежиште фигуре, место где гравитација делује као да је усмерена само на ту тачку.

Геометријске фигуре као што су троуглови и правоугаоници, или геометријска тела попут квадрата имају тежишта која се могу конструисати помоћу лењира и шестара. На пример, у троуглу се тежиште налази у пресеку тежишних дужи (објаснићемо зашто). Међутим, ова конструкција се заснива на геометријској дефиницији.

Пошто смо увели две дефиниције тежишта — геометријску (математичку) и физичку — покушаћемо да утврдимо њихову еквивалентност кроз убедљив аргумент или доказ.

Дефиниција тежишта као просечног положаја свих тачака фигуре тврди да постављање фигуре на ослонац у тој тачки обезбеђује хоризонталну равнотежу.

Као илустрацију, замислите да је свака тачка те фигуре једна мала честица с неком тежином, попут мале куглице. У просеку, свака таква честица која се налази с једне стране тежишта, има свог пара на супротној страни, и ти парови честица се међусобно доводе у равнотежу. Сви такви парови заједно се међусобно компензују, чиме успостављају равнотежу целе фигуре.

Основна идеја врти се око појма просека. Интуитивна чињеница на којој се заснива јесте да просечна вредност може представљати целокупан скуп вредности. Овај принцип се не односи само на нумеричке податке, као што су висина, тежина или валута, већ и на вредности положаја које су у равни одређене с две координате.

За почетак, можемо се позабавити аритметичком средином, која се често назива просечном вредношћу бројева. За два броја, означена са a и b , просечна вредност или просек, у ознаци L , израчунава се сабирањем a и b , а затим дељењем добијеног збира с два. Изражава се формулом на следећи начин:

$$L = \frac{a + b}{2}$$

Овај број L поседује специфична својства: подједнако је удаљен и од a и од b . Што је још занимљивије, збир растојања (узимајући у обзир да ли су растојања негативна или позитивна) од L до a и до b је једнак нули. Уколико искористимо формуле, биће на пример:

$$(L - a) + (L - b) = \frac{a + b}{2} - a + \frac{a + b}{2} - b = 0.$$

Замислите бесконачан штап без масе који се протеже дуж осе реалних бројева, где су јединичне масе фиксирани на позицијама a и b . Да би се постигла равнотежа, тачка ослонаца мора бити прецизно позиционирана у просечној тачки L . Интересантно је да се равнотежа штапа не мења без обзира да ли он носи две јединице масе на позицијама a и b , или једну масу од две јединице позициониране само у тачки L .

Сличан принцип важи и када истовремено посматрамо три броја. Просечна вредност, у ознаци $L = (a + b + c)/3$, чува тврђење да је збир растојања (узимајући у обзир да ли су растојања негативна или позитивна) до ова три броја једнак нули. На пример, за бројеве 2, 5 и 11 просечна вредност је $L = (2 + 5 + 11)/3 = 6$, а сабирањем одговарајућих растојања добијемо

$$(6 - 2) + (6 - 5) + (6 - 11) = 0.$$

Замислите штап с ознакама, који нема масу. Постављамо тегове с по једном јединицом масе на ознаке 2, 5, и 11. Да би се штап довео у равнотежу, тачка ослонца треба да се поравна с ознаком 6. Занимљиво је да би упориште трпело исту силу од ове три масе као и од једне масе од три јединице постављене на ознаци 6. Наведени принцип важи без обзира на то колико се реалних бројева разматра.

Када је у питању сценарио према ком се тачке налазе у равни, идеја је слична. Радимо с две координате за сваку тачку. За скуп тачака у равни, рецимо $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ и $C = (x_C, y_C)$, просечан положај ове три тачке биће тачка с координатама које су нумерички просеци њихових одговарајућих компоненти $L = ((x_A + x_B + x_C)/3, (y_A + y_B + y_C)/3)$.

Можемо израчунати просечне положаје за било који коначан број тачака у равни. У ствари, виртуелни експонат *Тежиште* управо на тај начин одређује тачку равнотеже нацртане фигуре: саставља листу пиксела који чине облик и израчунава просек њихових x и y координата. Међутим, математички, то је само апроксимација јер су фигуре састављене од тачака које су бесконачно мале, а не од пиксела. Диференцијални и интегрални рачун омогућава приказ овог процеса усредњавања користећи бесконачно мале величине уз интеграле као граничну вредност збира одговарајућих површина.

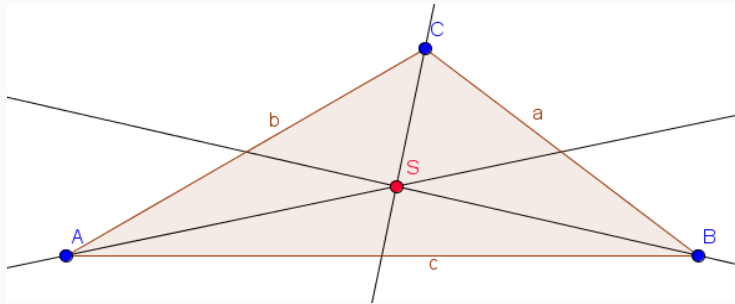
Примећујемо да различити скупови бројева могу дати исте просечне вредности. Конкретно, израчунавање парцијалних просека омогућава нам да скратимо листу посматраних бројева. На пример, просечна вредност бројева 2, 5 и 11 је једнака просеку бројева 2, 8 и 8, што је такође еквивалентно пондерисаној просечној вредности бројева 2 и 8 с тежинама $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, респективно:

$$\frac{2 + 5 + 11}{3} = \frac{2 + 8 + 8}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{2}{3} = 6$$

Овај принцип важи и за тачке у равни, које такође представљамо помоћу координата. Две тачке можемо заменити једном у њиховом тежишту (средиште дужи које одређују две посматране тачке), с обзиром на то да ова тачка носи комбиновану масу полазних тачака. Управо смо описали *принцип замене*: можемо заменити делове фигуре њиховим тежиштем, коме додељујемо масу пропорционалну површини коју замењујемо. Илустрација овога следи.

Занимљиво запажање се јавља када се посматрају три тачке у равни: тежиште три идентичне масе које се налазе на позицијама A , B и C поклапа се с тежиштем троугла који формирају наведена темена. Имајте на уму да је у другом случају укључен бесконачан број тачака, док први подразумева само три тачке. Штавише, споменуто тежиште се налази у пресеку три медијане² троугла, а то су дужи које спајају темена троугла са средиштима наспрамних страница.

² Медијана је позната и као тежишна дуж.



Илустроваћемо то користећи принцип замене. Посматрајмо темена B и C . Можемо заменити јединичне масе постављене у та два темена с једном масом од две јединице постављеном у средишту дужи одређеном тачкама B и C , што записујемо са $(B + C)/2$. Тиме добијамо систем који се састоји од једне јединице масе у тачки A и масе од две јединице у средини између B и C . Комбиновањем те две масе добија се једна маса која тежи три јединице и која се налази на пондерисаном просеку две локације, наиме:

$$\frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \cdot \frac{B + C}{2} = \frac{A + B + C}{3}$$

Ово показује да тежиште лежи на $\frac{2}{3}$ дужине тежишне дужи. Због симетрије, све три медијане поседују ово својство, што указује да се секу у тежишту.

Примењујући исти принцип замене на троугао, растављамо површ троугла ABC на дужи паралелне страници BC . Свака дуж подсећа на штап с равномерном линеарном густином. Замена сваког штапа масом постављеном на његовом средишту (тежиште дужи се поклапа са средиштем дужи) сажима све дужи у тачке поређане по медијани која пролази кроз теме A . Сходно томе, глобално тежиште удружује све тачке распоређене по тежишној дужи, потврђујући да је тежиште троугла негде на тој дужи. Због симетрије, оно се такође налази негде дуж друге две медијане, тако да се поклапа с тачком пресека све три тежишне дужи, и тиме потврђује да је у питању управо она тачка коју смо раније идентификовали.

Можемо искористити ово својство троуглова како бисмо успоставили методу за одређивање тежишта. Замислите неки многоугао (фигуру ограничену дужима). Могуће је разложити тај многоугао на троуглове, у питању је процес познат као триангулација. Кад направимо триангулацију, израчунавамо површину и одређујемо тежиште за сваки од тих троуглова. Затим одређујемо тежиште многоугла користећи принцип замене. Сваки троугао замењујемо његовим тежиштем, коме додељујемо масу на основу одређене површине. На крају ћемо израчунати (коначан!) пондерисани просек положаја тежишта троуглова, посматрајући њихове површине као одговарајуће масе.

Експонати из пројекта СМЕМ који су засновани на идеји тежишта

У оквиру пројекта СМЕМ постоје четири експоната који истражују идеју тежишта. Можете их комбиновати у тематску сесију, уз флексибилност да их користите истовремено или један за другим, што деци пружа различите могућности да истраже и схвате међусобне односе тих експоната.

Клацкалица

Експонат *Клацкалица* илуструје очигледан однос између два крака клацкалице: док се један подиже, други се спушта. Када је клацкалица празна, центар гравитације се налази изнад

дрвеног ослонца. Након што се на њене краке поставе неке масе, тежиште се помера према оптерећенијој страни и тако узрокује неравнотежу и нагињање на једну од страна.

Обично је прва претпоставка да се равнотежа постиже постављањем једнаких тежина на обе стране.

Децу треба подстаћи да уравнотеже клацкалицу, што ће покренути дискусију о појму равнотеже и оном деликатном тренутку када су оба крака на пола пута, односно нити су подигнути, нити спуштени до краја. Ово нестабилно стање треба да инспирише васпитаче и наставнике да усмере децу према истраживању фактора који ову конфигурацију чине јединственом.

На почетку деца могу претпоставити да је равнотежа постигнута онда када се на обе стране налазе једнаке масе. Међутим, кроз експериментисање ће уочити значај удаљености масе од тачке ослонца и откриће да, у циљу постизања равнотеже, тежи објекат мора бити постављен ближе средишту, док би лакши требало да буде даље од њега. Мала деца могу открити једноставне принципе, као што је чињеница да „постављање масе на дупло даље растојање компензује половину масе“. Старија деца могу чак открити и закон полуге.

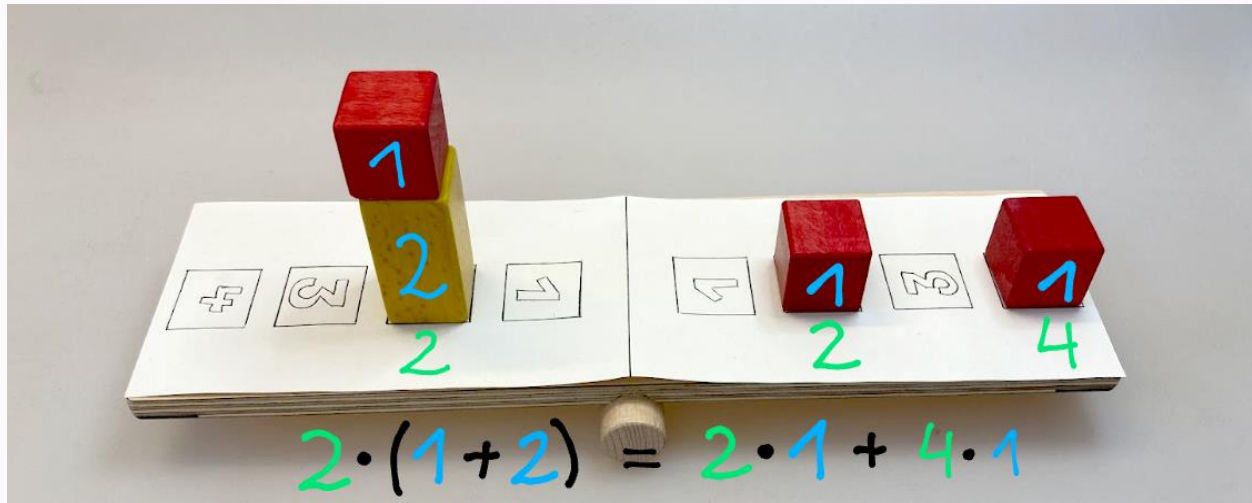
Постављање више од два објекта на краке клацкалице може продубити разумевање. Ако на клацкалицу означите негативне и позитивне бројеве с нулом у тачки ослонца, омогућићете деци да открију суштину: равнотежа се постиже онда када је збир пондерисаних растојања (тј. збир производа тежина и њихових растојања од ослонца) једнак нули. Ова спознаја долази кроз размишљање и захтева извесно време.

Додатне активности

Прва активност се спонтано намеће јер деца одмах почињу да постављају елементе на клацкалицу с циљем да постигну равнотежу. Уколико им ограничите број елемената (рецимо на три или четири) подстаћићете њихово интуитивно разумевање основних принципа.

Током друге активности деца постављају елементе различитих боја на супротне стране клацкалице како би постигла равнотежу. Кључно је поставити елементе различитих величина, али једнаких маса на идентичне нумеричке ознаке (нпр. на обе стране на ознаци два). Кроз овај експеримент деца откривају да су већи елементи тежи од мањих.

Трећи изазов подразумева постављање елемената на различите нумеричке ознаке дуж кракова клацкалице (полуге) како би се постигла равнотежа. Ако најмањем елементу доделите вредност једне јединице, а већим елементима редом вредности две и четири јединице, равнотежа се може постићи употребом само једног правила: производ броја јединица и нумеричке ознаке на којој се налазе елементи мора бити једнак с обе стране клацкалице. На пример, поставите ли елемент тежак четири јединице на место означено бројем један и елемент од две јединице на место означено с два на супротној страни клацкалице доведете је у равнотежу.



У потрази за равнотежом

Експонат *У потрази за равнотежом* очекује од деце да на ивицу зида поставе различите облике тако да они на њој балансирају. После кратког експериментисања, малишани ће лако постићи постављени циљ. Неки облици поседују централну симетрију - свака тачка облика је дијаметрално симетрична некој другој тачки у односу на фиксни центар симетрије, што је еквивалентно ротацији од 180° . У таквим случајевима, тежиште се поклапа с центром симетрије и када га наместимо да лежи на ивици зида за резултат ћемо добити облик подељен на две једнаке половине (истих површина, истих форми, ротирани једна у односу на другу за 180°), што га доводи у равнотежу. Међутим, то није увек тако, па децу треба подстицати да се играју и с несиметричним облицима.

Васпитач или наставник затим може покренути разговор о томе шта ту позицију чини јединственом и да ли је она на неки начин посебна. На самом почетку, деца могу мислити да је за равнотежу неопходно да с обе стране зида буду једнаке површине, што није тачно. Тада је корисно подсетити се да код експоната *Клацкалица* није било потребно да краци буду оптерећени једнаким масама; уместо тога било је важно прилагодити растојања тих маса од тачке ослонца. Дакле, равнотежу ћемо постићи онда када обе стране буду имале идентично оптерећење, а оно је одређено производом масе и њене удаљености од тачке ослонца.

У овом случају, поставка експоната подсећа на полугу која са сваке стране зида (он одговара тачки ослонца) има по део облика. Маса сваке области одговара њеној површини, али шта одређује дужину крака? Њихова дужина одређена је растојањем између тежишта области (може се одредити помоћу виртуелних експоната *Правимо кишобране* или *Тежиште*) и дужи која лежи на зиду. Равнотежа се постиже онда када обе области делују истом силом на полугу (производ површине области и дужине крака), а то се дешава управо онда када глобално тежиште припада дужи која лежи на зиду.

Да закључимо, облик је у равнотежи *ако и само ако* дуж која лежи на зиду садржи његово тежиште. То се може илустровати експериментом: најпре наместите облик да балансира на зиду, а затим поставите новчић између облика и зида на једној од две крајње тачке дужи која лежи на зиду. Облик је у равнотежи, али сада се ослања на две тачке: на новчић и на супротну крајњу тачку дужи. Постепеним померањем новчића ка супротној крајњој тачки (уз помоћ лењира или другог равног помагала), облик ће се уравнотежити само на новчићу тачно онда када се положај новчића поклопи с тежиштем облика. Ову особину можете тестирати помоћу

провидних облика који припадају експонату *Правимо кишобране*, с означеним тежиштем које је претходно идентификовано помоћу виртуелног експоната.

Додатне активности

Након што деца заврше с игром и истраживањем експоната, на располагању су вам разне занимљиве активности намењене за учионицу. Позовите их да у учионици пронађу предмете које би могли да постављају у равнотежни положај или да такве предмете потраже у свом окружењу.

Други изазов би могло бити да нацртају те предмете на папиру, изрежу их и затим их поставе на пластичне фигуре, како би поново кренули у потрагу за успостављањем равнотеже. Означавање линије на папиру дуж које је објекат у равнотежи помоћи ће им да схвате идеју тежишта. Додатно истраживање може бити испитивање симетрије фигура.

Последња вежба биће балансирање неког објекта у облику штапа (нпр. метле) с две руке. Лако можете пронаћи тачку тежишта тако што ћете стабилно поставити штап на два прста, по један са сваке руке, и постепено их приближавати. На наше изненађење, штап ће остати у равнотежи. Спајањем прстију пронаћи ћете центар гравитације штапа.

Правимо кишобране и Тежиште

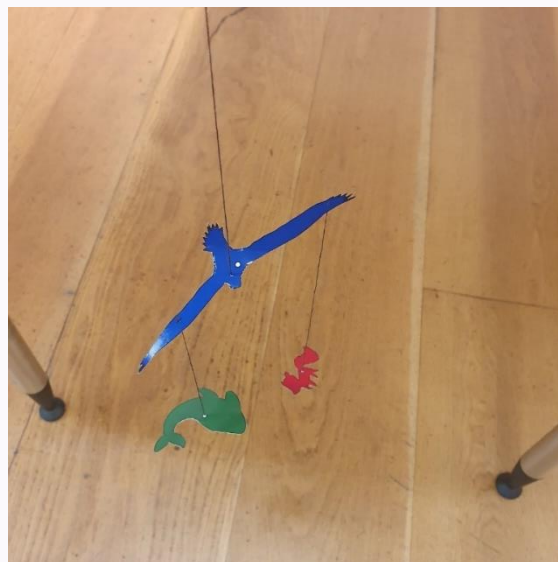
Експонати *Правимо кишобране* и *Тежиште* блиско су повезани. Први је осмишљен за самосталну употребу на изложби, и има једноставнији кориснички интерфејс прилагођен млађој деци. С друге стране, експонат *Тежиште* проширује функционалност првог, уз исте карактеристике, али са сложенијим опцијама. Ова напредна верзија погоднија је за старију децу, а замишљено је да је води васпитач или наставник.

Експонат *Правимо кишобране* тражи да се лист постави у равнотежу хоризонтално на врху штапа, и да се тако формира кишобран. Помоћу апликације на таблету деца могу лако цртати једноставне фигуре, укључујући и листове, и одмах открити њихово тежиште. Постављање листа тако да та тачка буде на врху штапа обезбедиће равнотежни положај. Транспарентни листови могу помоћи у цртању, а емпиријски приступ који подразумева ручно балансирање листа да би се открило његово тежиште може се искористити да се тако одређено тежиште упореди с тежиштем које је израчунала апликација.

Експонат *Тежиште* омогућава корисницима да цртају различите фигуре на таблету и да истражују заједничко тежиште више фигура поред њихових појединачних тежишта. Деца могу бирати унапред дефинисане фигуре или користити своју машту за стварање јединствених креација.

Додатне активности

Децу можете укључити у практичну активност тако што ћете им задати да нацртају малу фигуру на таблету и да је затим пресликају, заједно с тежиштем, на комад папира. Када је једном нацртана, фигура је на таблету заштићена тако да се неће избрисати уколико додирнете екран, већ то можете учинити само кликом на тастер с оловком. Повећајте осветљеност екрана таблета на максимум како би пресликавање фигуре на папир постављен на таблет било лакше.

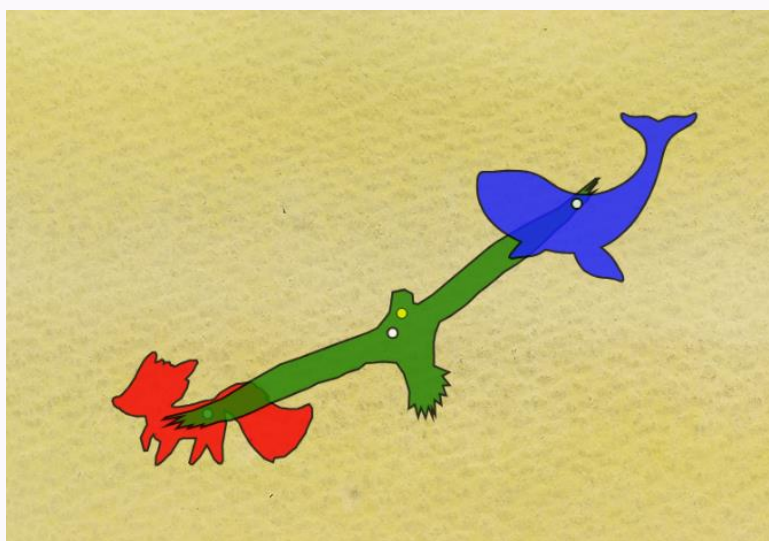


Нека затим деца поново нацртају исту фигуру, али увећану, настојећи да им је растојање између прста или оловке и ивица прве фигуре једнако. Поређење тежишта те две фигуре требало би да покаже да се она поклапају.

Деца могу наставити истраживање балансирањем различитих предмета на врху штапа или прста. Рецимо, можете балансирати тањир на дрвеном штапу, што подсећа на циркуске трикове, или окретати кошаркашку лопту на врху прста. За почетак, деца могу користити дебљи штап ради лакшег постизања равнотеже, а како буду стицала искуство, могу прећи на тање штапове.

Користећи експонат *Тежиште* ученици могу направити праву играчку за дечји креветац, састављену од три хоризонтално уравнотежене дводимензионалне фигуре. Васпитач или наставник може унапред припремити шаблоне за исецање, а деца могу саставити мобилну играчку уз помоћ лепка и канапа. Алтернативно, деца могу нацртати неке своје фигуре и сачувати их као PDF датотеку коју ће васпитач или наставник одштампати, а затим деца могу направити сопствену мобилну играчку.

Препоручујемо да структуру чине једна дугачка фигура, попут птице с раширеним крилима и две додатне фигуре које могу бити било каквог облика (нпр. различите животиње). Дугачка фигура ће се качити за креветац помоћу канапа. Друге две фигуре ће висити с ње, а треба да буду доста раздвојене (нпр. наместити их да висе с врхова крила дугачке фигуре). Све три фигуре одржавају хоризонталну равнотежу. Помоћу апликације креирајте жељене фигуре и означите им тежишта како бисте знали где да причврстите канапе.



Веза с наставним планом и програмом

Учење кроз истраживања о равнотежи и идеји тежишта помаже у развијању вештина процене количина, површина и растојања као и њиховог организовања у системе.

Активности које смо предложили подстичу развој математичких компетенција и вештина као што су комуникација, преношење информација и идеја путем различитих средстава, решавање проблема, изношење аргумената и моделовање.

Испитивање равнотеже и центра гравитације подстиче развој компетенција као што су тачно поређење површина, облика и тежина, постављање и провера претпоставки и развој осећаја за процену количина.

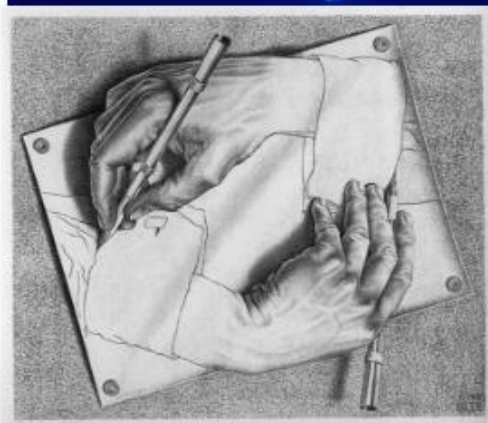
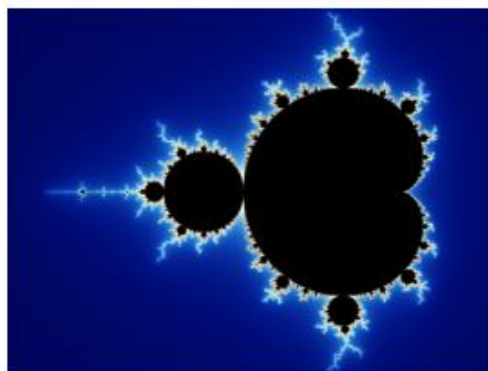
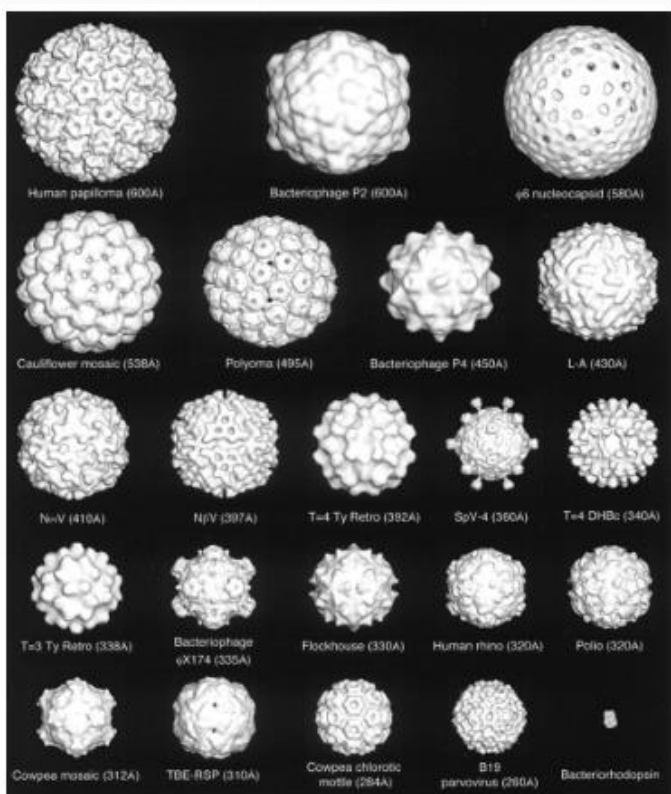
Теоријска основа представљена на почетку овог одељка превазилази стандардне садржаје обухваћене наставним планом и програмом геометрије и математике за циљни узраст од три до осам година. Тај садржај углавном није део обуке васпитача у вртићима или наставника у основним школама, барем не у Немачкој. Међутим, он пружа драгоцену знање васпитачима и наставницима помажући им да боље упознају децу с овим концептима. Рано излагање деце апстрактним концептима кроз игрице и забавне активности може значајно побољшати њихово математичко размишљање. Штавише, исти садржај је од значаја и за неке нивое даљег образовања (нпр. у средњем образовању може помоћи код увођења основних идеја интегралног и диференцијалног рачуна, граничних вредности, векторског рачуна³ и других концепата).

³ Споменимо Гринову теорему за одређивање тежишта.

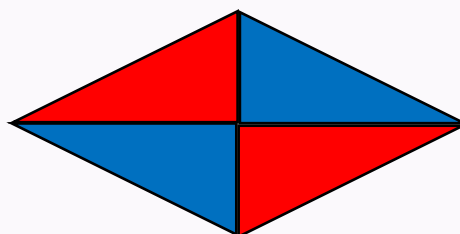
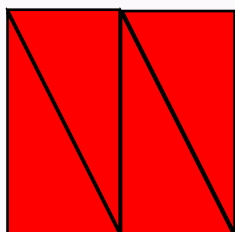
Огледала и симетрија

Које идеје крије симетрија

Мало је концепата који се могу повезати с људским искуством на толико различитих начина колико то омогућава симетрија. Од најприроднијих и најспонтанијих открића малог детета (тело, руке, ..., огледало!) до различитих облика уметности (вајарство, музика, архитектура, сликарство) и науке (хемија, физика, биологија и, наравно, математика).⁴



Овде најсложенија објашњења вреде колико и откриће које једанаестогодишња девојчица може да направи када схвати да не може трансформисати један полигон у други само уз помоћ транслације или ротације, већ да мора изаћи из равни да би остварила симетрију!



⁴ Током 2019. године, у сарадњи с фондацијом EduCaixa, ММАСА је организовала низ скупова на којима смо развили концепт симетрије кроз музику, вајарство и керамику, филм, књижевност и музеографски језик. https://cosmocaixa.org/es/p/espejos-y-simetrias_c379563

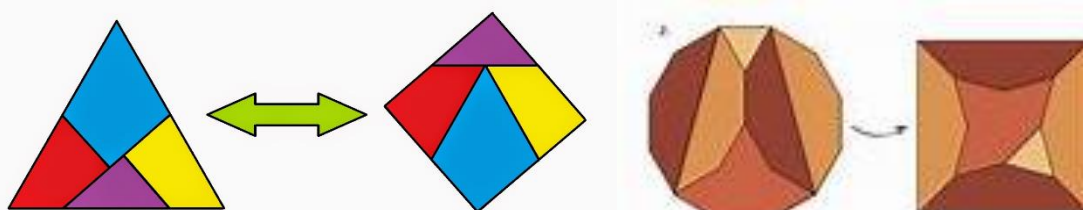
Једном када је откријемо, симетрија постаје незаобилазан део нашег математичког сазнања, али сви смо сведоци колико тешкоћа представља најмлађој деци да учине овај мали али велики корак, да раскину везу коју имају с папиром или таблом и изведу диван салто у простору.

Симетрија је толико својствена људском размишљању да често представља примарни приступ решавању проблема.

Добар пример је еквиваленција многоуглова која се доказује кроз растављање првог многоугла на елементе и поновно састављање у други многоугао.

Пример

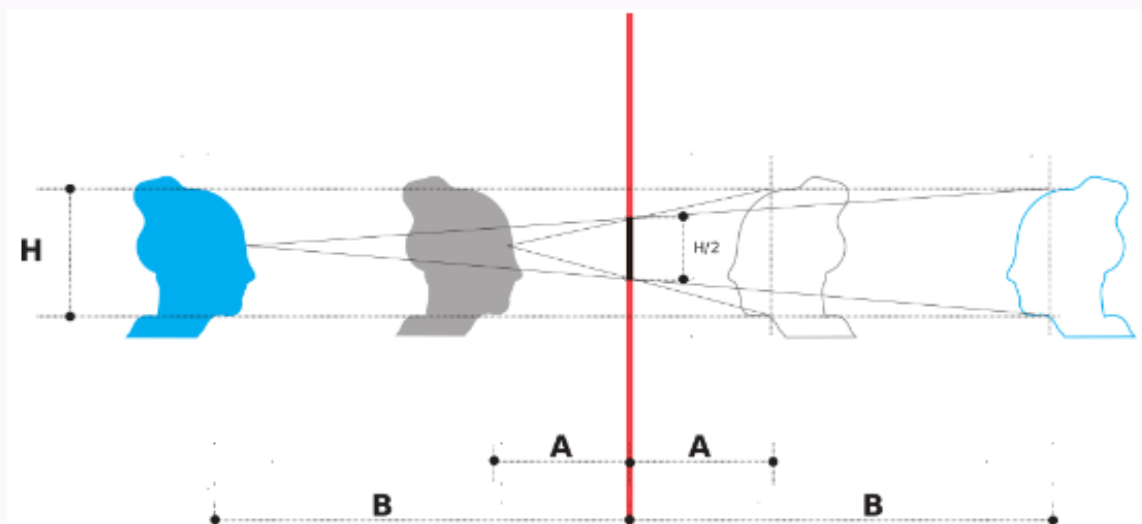
Иако с *a priori* тачке гледишта неискусног детета може изгледати да је лакше трансформисати троугао него дванаестоугао у квадрат (и обрнуто), заправо важи супротно. То је зато што трансформацију дванаестоугла олакшава симетрија:



Када је математика одлучила да се ослободи своје улоге суве и апстрактне дисциплине и уместо тога покаже своју разигранију страну, ону која је ближа свакодневним искуствима, симетрија је заузела значајан простор у музејима, било кроз употребу огледала било без њих.

Значајан део изложбе *MateMilano* поставио је фокус на симетрију, а исто важи и за комплетну изложбу *MMACA* у Кастелдефељсу. Такође треба напоменути да су експонати засновани на принципу симетрије, огледала и калеидоскопи типични елементи у оквиру научних и технолошких изложби у водећим музејима.

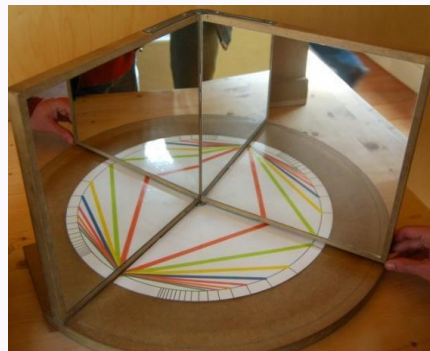
Понуда може варирати од узнемирујућег искуства током посете Лавиринта од огледала у Тибидабу до навођења посетилаца да размишљају о сусрету који ставља на пробу уобичајену перцепцију. Један од експоната подстиче посетиоце да измере димензије свог лица док се огледају у обичном огледалу. Пажљивијим посматрањем откриће да су димензије слике у огледалу двоструко мање од димензија њиховог лица и да се те димензије одраза не мењају када се особа приближи или удаљи од огледала. О чему се ту ради?



Физика објашњава овај феномен, али истински га прихватити често захтева мало рефлексије (намерна игра речи) и мало времена проведеног у писању по кућном огледалу ивицом сапуна или кредом.

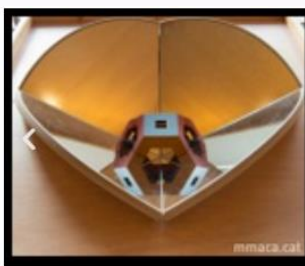
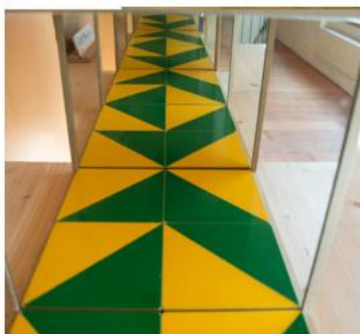
Следеће откриће омогућиће један пар огледала повезаних дуж једне од страна у облику књиге која ће умножавати новчић или број страна полигона у зависности од угла између огледала.

Два огледала с фиксираним унутрашњим углом од 90° разликују десно и лево: наместите се тачно у центар између огледала и десном руком додирните уво. Коју руку је користио ваш одраз у огледалу? Сада заротирајте огледала тако да се још увек можете видети у њима. Зашто је сада ваш одраз постављен наопачке? За колико степени сте се окренули у огледалима, 90° или 180° ?



Да ли смо разумели да огледало множи с два, два огледала множе с четири, а три огледала су постављена тако да формирају унутрашњу област рогља коцке? Хајде да научимо да прстима пратимо путању која се креира у огледалу. Напред или назад? Како померити прст ако се крива коју формира путања савија улево?

Научимо како да цртамо бесконачне мозаике помоћу паралелних огледала и како да нас не заварују лажне пропорције Ејмсове собе.⁵



На крају се предајемо привлачности калеидоскопа, који омогућавају једној дужи да генерише двадесет троуглова икосаедра, или када је заротирамо за 90° , дванаест петоуглова додекаедра. То је огромно побољшање једноставне играчке, које подсећа на трансформативни утицај Галилеовог телескопа.

⁵ Ејмсва соба је изобличена соба која омогућава оптичку илузију. Изумео ју је амерички научник Аделберт Ејмс млађи (*Adelbert Ames Jr*, 1880 – 1955) половином двадесетог века, највероватније под утицајем списа Хермана Хелмхолца (*Hermann von Helmholtz*, 1821 – 1894). У питању је просторија изграђена тако да су јој и под и плафон под углом, чиме се ствара неочекивана перспектива која наводи око да је види као да су обе стране собе исте дужине, што даље омогућава стварање оптичке илузије неједнаке величине објеката или особа које се у њој налазе.

Веза с наставним планом и програмом

Пре него што почнемо да разматрамо активности које су засноване на симетрији, морамо увести идеју уклапања облика која игра основну улогу у наставном плану и програму намењеном најмлађима. Тај циклус намењен је деци узраста од три до шест година и обухвата кључни период когнитивног развоја и припреме за формално учење математике. Истраживање геометријских облика на опопљив начин у најранијем вртићком узрасту од суштинског је значаја за постављање темеља за разумевање математике.

Као први корак, деца овог узраста се подстичу да истражују различите геометријске облике (као што су *Pattern Blocks*⁶) и директно се играју с њима. Уче да препознају ове облике у свом свакодневном окружењу, било кроз играчке, предмете или чак архитектонске елементе. Тај почетни корак упознаје децу не само с основним облицима као што су кругови, квадрати, троуглови и правоугаоници, већ и са тиме како спојити те облике да би се формирали неки други, као што је трансформација правилног троугла у ромб, трапез или шестоугао.

Затим се уче да именују те облике, што не само да им обogaђује речник, већ пре свега указује на корист дефинисања и одређивања карактеристика објекта, кроз њихово сажимање у име.

Такође уче да разликују својства облика (као што су препознавање правилности и шара) и да упоређују димензије (странице, површине). Ово је кључни корак у развоју њихове способности да комуницирају и да прецизно описују облике.

Употреба основних геометријских облика за грађење сложенијих структура је кључна педагошка активност којом се развија просторно размишљање и креативност ученика. Тај процес се може обогатити употребом огледала, која удвостручују облике и подстичу додатно когнитивно ангажовање.

У другој фази огледало може послужити као алат за поделу облика на мање елементе који се могу понављати, под условом да смо утврдили где се налази оса или центар симетрије.

То су све кораци за лакше успостављање дијалога између два различита приступа: аналогног, укорењеног у посматрању, и аналитичког, усредсређеног на препознавање променљивих и развој стратегија.

На почетку следећег циклуса (узраст од шест до осам година), ученици настављају своје математичко образовање јачањем темеља успостављених у првом циклусу. Ову почетну фазу другог циклуса карактерише детаљније истраживање геометријских облика. Како већ познају квадрате, правоугаонике и троуглове, ученици могу да се баве сложенијим композицијама. Почињу да склапају компликованије фигуре, третирајући познате основне облике као делове математичке слагалице, док обично бројање почиње да замењује сабирање.

Ученици настављају да истражују и идентификују геометријске односе, продубљујући на тај начин своје разумевање симетрије и разумевање како геометријски објекти могу бити

⁶ *Pattern Blocks* (шаблонске плочице) настале су током шездесетих година двадесетог века у Масачусетсу (САД) у склопу пројекта за изучавање основних наука (*Elementary Science Study (ESS) project*). Основну идеју, која је касније тестирана и дорађивана у учионици, развој је Едвард Преновиц (*Edward Prenowitz*).

Један комплет садржи више плочица у неком од следећих шест облика: зелене једнакостраничне троуглове, плаве ромбове које чине два једнакостранична троугла, беж ромбове оштрог угла од 30° и странице једнаке дужини странице једнакостраничног троугла, црвене трапезе које чине три једнакостранична троугла, жуте правилне шестоуглове састављене из шест једнакостраничних троуглова и наранџасте квадрате странице једнаке дужини странице једнакостраничног троугла. Мере углова свих елемената су садржаоци броја 30 (30° = 1/12 пуног угла): 30°, 60°, 90°, 120° и 150°.

међусобно позиционирани у свету око нас (нпр. архитектонске структуре, геометријски обрасци у природи или распореди објеката у свакодневном окружењу).

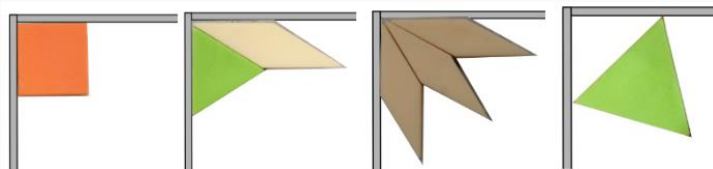
Штавише, састављање геометријских фигура се природно интегрише с другим математичким вештинама. Играјући се с дводимензионалним фигурама ученици побољшавају разумевање појмова као што су обим и површина. Истраживање идеје тежишта биће одговарајући следећи корак, као што је објашњено у поглављу о тежишту. Тај процес побољшава код ученика опште разумевање математике и њихове способности решавања проблема, омогућавајући им да холистички приступе проблемима и да уочене правилности преведу у формуле.

Експонати из пројекта СМЕМ који су засновани на симетрији

Нека расте цвеће!

Можете креирати различите облике распоређивањем плочица *Pattern Blocks*® у оквиру унутрашње области коју формирају два огледала постављена под углом од 90° .

Логично, само они облици који сами или заједно могу формирати прав угао ће стати између два огледала; у другим случајевима у структури ће се појавити празне области. У оба случаја изграђени узорак ће се симетрично репродуковати у огледалима.



Активност би могла да подразумева вођење ученика кроз реплицирање прогресивно изазовнијих облика приказаних на табли или кроз подстицање да сами креирају оригиналне структуре. Од суштинске је важности размишљање које подстиче анализу засновану на знању стеченом у свакој фази школовања, а укључује разматрање углова, композиција фигура (истичући једнакости њихових страна), истраживање односа између различитих области, итд.

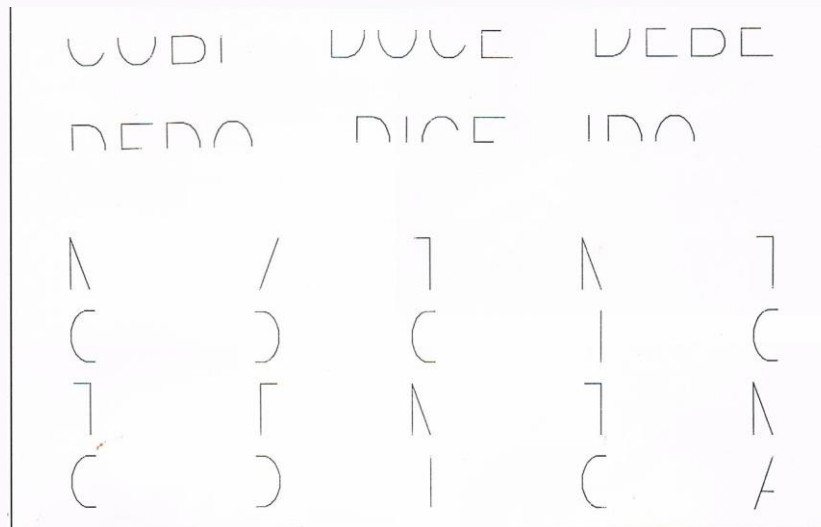
Још једна напредна вештина јесте препознавање симетрије у датим облицима.

Занимљива активност с толико снажним утицајем на емоције да морате да је пажљиво водите јесте снимање селфија с фотоапаратом постављеним паралелно с лицем, а затим дуплирање сваке половине лица помоћу огледала. Ова вежба намеће да се запитамо да ли нам је лице заиста симетрично?

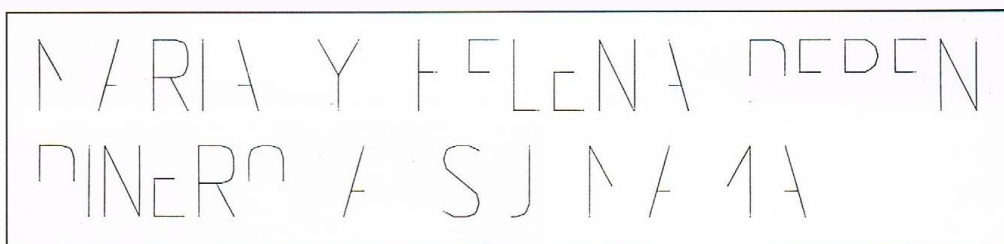


Још једно занимљиво истраживање би се могло засновати на проучавању симетрије штампаних слова.

Ево неколико примера у којима шпанске речи треба прочитати помоћу огледала. Лак задатак за ваше ученике може бити да пронађу речи на свом матерњем језику које би могли читати уз помоћ огледала.

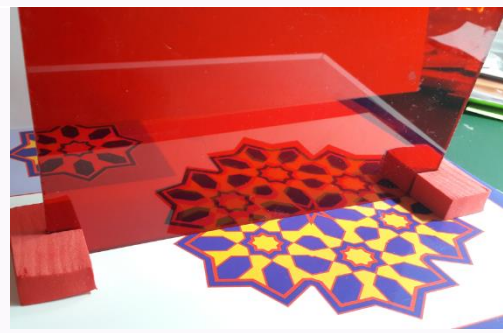


Ево неких тајних порука (на шпанском).



Анализа симетрије многоуглова може резултирати занимљивим активностима све већег степена сложености. На пример, ученици могу тражити најмањи део фигуре који, уз помоћ једног или два огледала, омогућава реконструкцију целокупног облика.

Алати који се могу користити током ових активности истраживања феномена симетрије укључују *Mira* (види слику) и *Georeflector*. У питању су полупровидни пластични листови. Када их поставите на фигуру, они приказују „скривену“ половину транспарентно и делимично рефлектовану. Оса симетрије се појављује у тренутку када се те различито приказане половине поравнају.

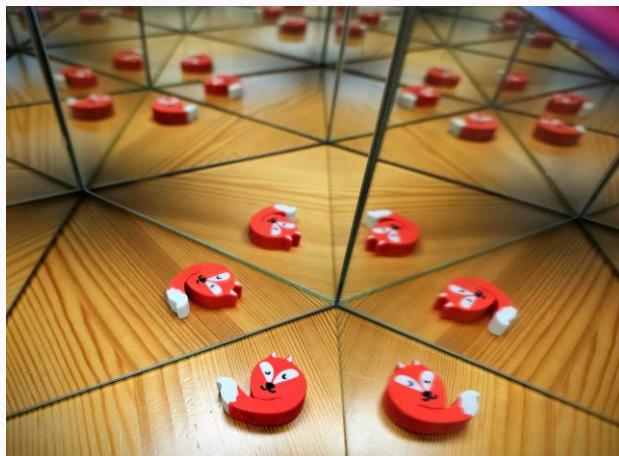


Калеидоскопи

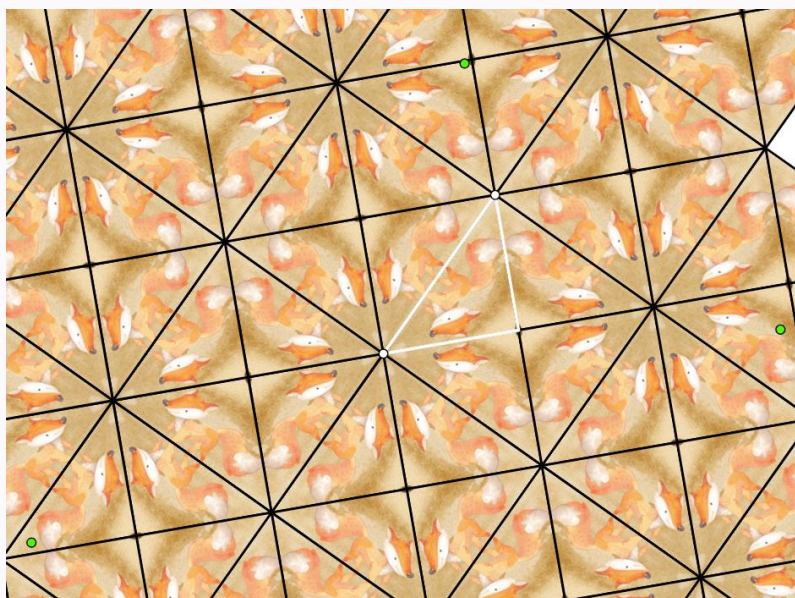
Следећи корак после истраживања експоната *Нека расте цвеће!* је прелазак с два огледала на три, која формирају троугао. Ова промена нас води до експоната *Калеидоскоп*, доступног у

физичкој и виртуелној верзији. За разлику од розета („цветова“) које помоћу два огледала посматрамо са „спољашње“ стране, тространи калеидоскоп испуњава целу раван шарама „изнутра“, пружајући нам импресивније искуство. Међутим, може нам бити теже да их посматрамо под углом, па зато нудимо виртуелну алтернативу експонату с правим огледалима.

У оквиру експоната на располагању су калеидоскопи обликовани у према карактеристичним троугловима с угловима од $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ и $(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$. Када поставите објекат унутар ових калеидоскопа, његови одрази испуњавају раван као што се види на слици:

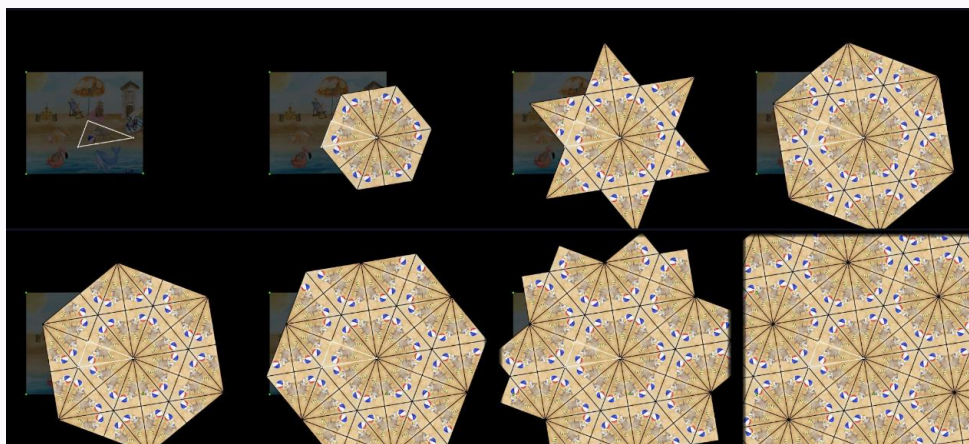


Претходна фотографија приказује права огледала постављена под угловима $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$ тј. у облику правилне тростране призме који формирају три огледала. Фотографија испод је виртуелна демонстрација која приказује калеидоскоп с огледалима распоређеним под угловима $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ тј. у облику тростране призме с основом у облику једнакокрако-правоуглог троугла који формирају три огледала, слично поставци огледала код експоната *Нека расте цвеће!*



Оригинална слика Лије Ејми налази се унутар троугла који је оивичен белом бојом, док све остале слике представљају одраз оригинала, затим одраз одраза у огледалу, па одраз одраза одраза у огледалу, итд. Схватате идеју.

Виртуелни експонат вам омогућава да, до одређеног степена, одаберете број огледала видљивих на екрану. Почиње без огледала, затим приказује розету од два огледала и додаје све више и више огледала изван розете (одржавајући симетрију „кржног облика“) док се цела (видљива) равна не испуни одразима у огледалима.



Образац који се понавља и покрива равна назива се периодично постављање плочица или теселација. Може се састојати од неколико геометријских облика (називамо их плочицама) распоређених без преклапања или празнина тако да покривају равна. Овде користимо само једну врсту плочица, оне у облику троугла. Изабрали смо углове троугла тако да можемо направити поплочавање. Можете истражити да ли постоје друге троугласте плочице које омогућавају поплочавање равни.

Јединствено периодично поплочавање настаје када се једна правилна плочица користи више пута, чиме се бесконачно протеже по равни. Правилна плочица значи да јој све стране имају исту дужину и да су јој сви углови једнаки. На пример, најједноставнији правилан облик је једнакостранични троугао, тако да се с распоредом огледала под угловима (60° , 60° , 60°) креирају регуларна периодична поплочавања која садрже различите врсте симетрија:



Посматрајући слику можете приметити различите врсте симетрија:



Ротациону симетрију најлакше ћете замислити на следећи начин: изаберите један врх било ког од троуглова. Фиксирајте ту тачку и ротирајте шаблон око ње. То можете једноставно замислити, или можете стварно ротирати прави троугао са шаром који је нпр. фиксиран иглом за једно теме. Ако користите прави калеидоскоп, морате замислити да се образац бесконачно наставља, покривајући целу раван, а не само папир који се налази испред вас. Након ротације од 60° , добићете слику у огледалу оне верзије шаблона с којом сте почели. Након још 60° , враћате се на оригинални узорак. Ова врста симетрије се назива трострука симетрија, јер се током ротације од 360° оригинални образац појављује три пута.



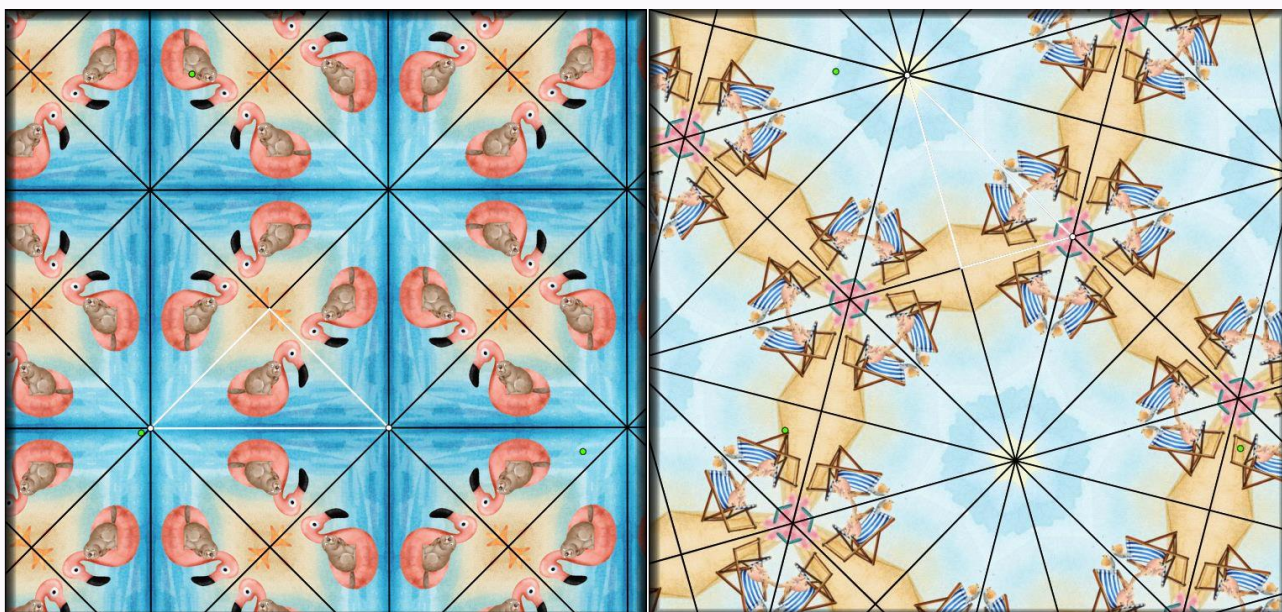
Транслациона симетрија се постиже померањем комплетног узорка за одређено растојање у истом правцу, чиме се шара од које смо кренули не мења. На слици поред изаберите једну од правих. То може бити или једна од хоризонталних правих, или једна од оних које секу слику под углом (од горњег левог ка доњем десном углу, или обрнуто, од доњег левог ка горњем десном углу). Без обзира коју праву одаберете, биће их више сличних, и све су међусобно паралелне. Сад замислите да сте изабрану праву поставили на следећу паралелну праву, чиме сте добили потпуно исту шару с којом сте започели истраживање. Ово неће радити ако се зауставите на следећој паралелној правој, јер ћете на тај начин добити слику у огледалу оригиналног узорка. Покушајте то да замислите.



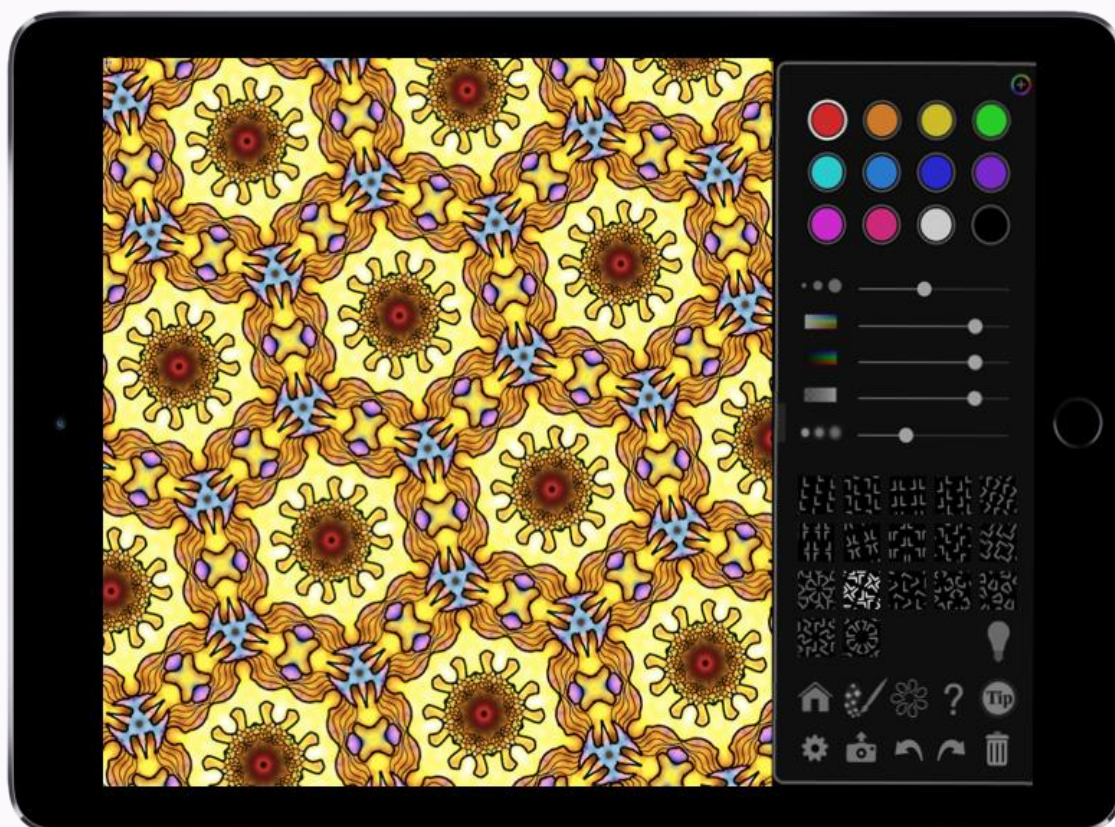
Рефлективна симетрија (или симетрија огледала) је најинтуитивнија. Можете замислити да сте поставили огледало на било коју од три врсте правих које смо већ идентификовали када смо разматрали транслациону симетрију да бисте добили исту шару.

Постоји и клизајућа рефлексија, а то је комбинација транслације и рефлексије. Код те трансформације можете замислити да сте померили целу шару и након тога је пресликали помоћу огледала (или сте све то применили обрнутим редоследом) да бисте поново дошли до истог узорка.

За вежбу, можете покушати да идентификујете различите симетрије које стварају преостала два калеидоскопа која формирају три огледала.



Ako vas je opčinila lepota periodičnog popločavanja, možete da potražite aplikacije *iOrnament*⁷ ili *Morenaments*⁸, koje vam omogućavaju da crtate sopstvene šare u bilo kojoj od 17 grupa simetrije (potražite i koncept grupa simetrije, mogu se takođe nazvati i grupama tapeta. Dobra tačka za početak je otvorena platforma *Mathigon*⁹). I najmlađi će moći da kreiraju neke lepe šare od nule.



⁷ <https://www.science-to-touch.com/en/iOrnament.html> (dostupno samo za MacOS)

⁸ <https://www.imaginary.org/program/morenaments>

⁹ <https://mathigon.org/course/transformations/symmetry-groups>

Другари у огледалу

Оригинални експонат који је ММАСА наменила ученицима узраста од шест до десет година, нешто је једноставнији у поређењу с верзијом креираном у оквиру пројекта СМЕМ. Ипак, он захтева основно рачунање напамет као и познавање операција сабирања и множења (с фокусом на чиниоце два и три).

Да бисте га рекреирали, потребне су вам три кутије означене бројевима један, два и три, извесна количина гумених лоптица (од две до четири) и једна или две коцкице за игру (у зависности од жељеног нивоа тежине).



Правимо број тако што стављамо лоптице у кутије. Бацањем коцкице добијамо број који ћемо креирати. Вредност сваке лоптице одговара броју приказаном на кутији у коју смо сместили лоптицу.

Први ученик прави број на свој начин, а други ученик покушава да дође до истог броја, али с другачијим распоредом лоптица.

На пример, уколико користимо једну коцкицу и две лоптице и ако је бацањем коцкице добијена четворка, први играч може ставити две лоптице у кутију с ознаком 2 ($2 \cdot 2 = 4$), док други играч може ставити по једну лоптицу у кутије означене с 1 и 3 ($1 + 3 = 4$). На овај начин оба играча постижу по један поен.

Можемо повећати број могућих комбинација додавањем треће лоптице.

Такође можемо применити правило према коме тачан одговор добија онолико поена колико је лоптица употребљено.

Поред тога, можемо увести атрактивне варијације игре прилагођавањем вредности додељених кутијама (нпр. уместо 1, 2 и 3 можемо користити 1, 2 и 4 како бисмо симулирали бинарни систем) или додавањем кутије с ознаком „0“ (представља неутрални елемент за сабирање) и увођењем правила да се морају употребити све лоптице за прављење траженог броја.

Као што је већ споменуто, ова активност захтева основно знање о операцијама сабирања и множења. Суочени с изазовом да је прилагодимо деци с ограниченим вештинама рачунања, пронашли смо решење које користи огледала.

Огледала су нам омогућила да поједноставимо задатак тако што смо с рачунања прешли на бројање:

- Једно огледало удвостручује предмете (1 објекат + 1 слика = множење с два).
- Два огледала постављена под углом од 120° утростручиће број предмета постављен испред њих (1 објекат + 2 слике = множење с три).
- Два огледала постављена под углом од 90° учетворостручиће број предмета које смо ставили испред њих (1 објекат + 3 слике = множење с четири).

Ова верзија је јасна млађој деци јер разлаже информације на схватљиве делове.

Можда неће свакоме бити лако да прихвати правило да одраз може вредети исто колико и предмет који се поставља испред огледала. Ослањамо се на изузетну флексибилност дечје маште како бисмо били сигурни у потпуно прихватање ових правила.

Верујемо да је виртуелну верзију овог експоната, где сви објекти приказани на екрану (било да су присутни од почетка или су се накнадно спонтано појавили) имају исту виртуелну вредност, још лакше прихватити. Тај приступ изазива, барем донекле, исти ниво ангажовања и разумевања.

Коцке за цртање

Прва идеја за овај експонат заснована је на дечјој играчки која има за циљ да се изграде лица приказана на картицама.

Инспирисани тим концептом одлучили смо да применимо исти принцип, али с геометријским сликама, користећи симетрију својствену овим облицима и коцки као геометријском телу. Резултат су четири дрвене коцке којима је на свакој страни тамнијом бојом нацртан другачији облик. Све коцке су идентичне величине и садрже истих шест цртежа.



Коцке можете направити користећи оригами или помоћу картона.

Саставите их лепком и обојите им стране. Иако постојеће цртеже можете заменити како би увели могућност креирања нових облика, они које смо предложили бирани су због своје једноставности (сви су нацртани у једном од углова) и погодности за образовне активности.



Након што узмете у руке ове коцке, инстинктивна реакција је да разиграно истражујете облике који могу да се створе: кругове, два различита троугла, два различита квадрата, четворокраку звезду, корнет за сладолед итд. Ученици морају да ротирају коцке и да их позиционирају на различите начине да би формирали задате фигуре, брзо откривајући да су само две стране асиметричне, што захтева да се оне употребе у пару како би се постигла симетрија целе слике.

Након тог уводног истраживања може се започети с вођењем активности:

- Направите све могуће многоуглове с три или четири стране.
- Направите све могуће симетричне фигуре (има их много ако прихватимо оне које настају помоћу ротационе симетрије!)
- Разврстајте неке од тих фигура према површини (без израчунавања!)

Након почетног истраживања и игре, можете прећи на различите активности у учионици, усмеравајући ученике одговарајућим питањима (која ће им помоћи да јачају своје разумевање):

- Колика је површина формиране фигуре и како је израчунати?
- Колики је обим фигуре и како се израчунава?
- Упореди обим и површину пропорционалних фигура.
- Креирај нове облике и израчунај њихову површину и обим.

Од кључног је значаја истражити основне особине геометријских фигура и искористити симетрију за израчунавање површина и обима без ослањања на формуле. Овај приступ подстиче развој вештине решавања проблема код ученика.

Као додатну активност, можете задати ученицима изазов да измисле своје коцке, нацртају фигуре на свакој од страна и тако направе јединствени сет коцки помоћу оригамија или 3Д штампача.

Направи ми крила

Ова активност наглашава стапање креативности и решавања проблема, баш као што то чине и остали експонати који су резултат пројекта СМЕМ.



Први корак био би да се репродукује композиција елементарних облика (помоћу шаблонских плочица *Pattern Blocks*®,) на једном крилу силуете лептира.

Тај задатак захтева тачну идентификацију потребних делова (троуглови, квадрати, ромбови, трапези и шестоуглови) и њихово симетрично распоређивање унутар празног оквира. Изазов можда неће бити одмах једноставан, посебно не најмлађима.

У другом делу активности ученици попуњавају оба крила користећи расположиве облике. Могли бисте им обезбедити потребне делове како бисте их навели на прави пут, иако не и натерали да њиме крену, да конструишу симетрична крила. Алтернатива би била да им ставите на располагање и додатне делове како бисте им омогућили више слободе у прављењу крила.

Један од привлачних аспеката ове активности јесте њена прилагодљивост. Можете је врло лако прилагодити да одговара појединцима, тако што ћете омогућити свакоме да направи сопствену креацију лептирових крила.

Примери активности које користе исте материјале

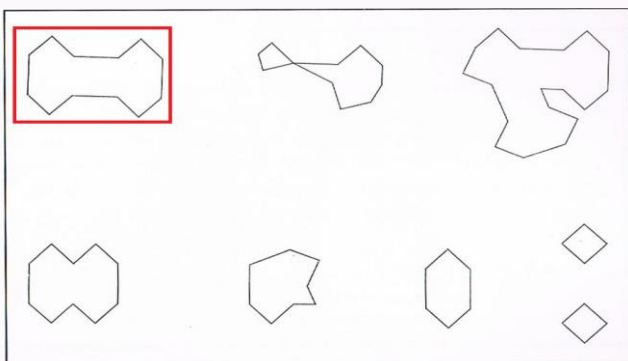
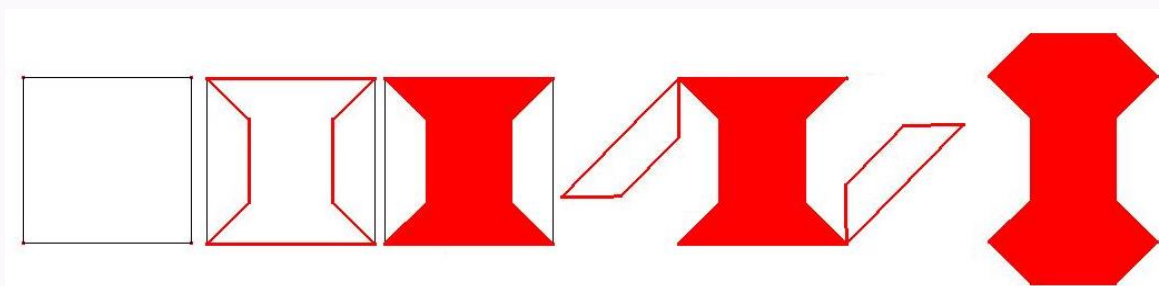
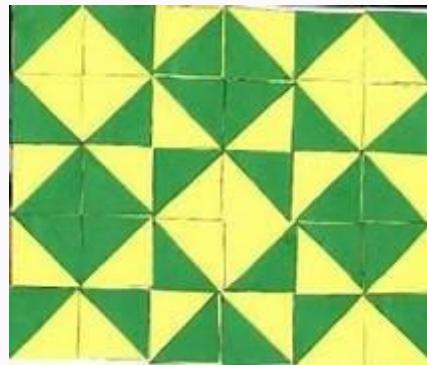
У овом поглављу споменућемо неколико додатних активности које бисте могли да спроведете користећи исте образовне материјале.

Мозаици се лако праве помоћу класичних двобојних плочица. Различите комбинације могу дати привлачне резултате, посебно када се користи огледало. Још једна опција би било

постављање мозаика између два паралелна огледала што може створити пријатне естетске ефекте.

Кинески танграм такође нуди могућности за истраживања на тему симетрије.

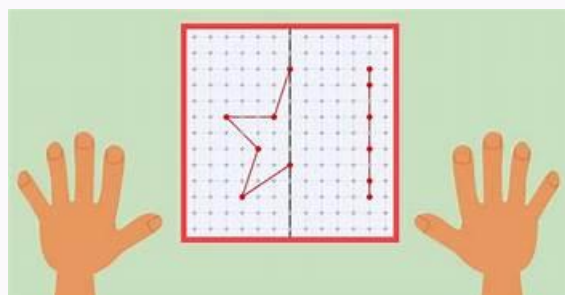
Још једна активност која изазива знатижељу јесте изградња насридске¹⁰ кости, која служи као основа за различите варијације на тему симетрије. Ученици могу да се увуку у ову конструкцију тако што ће за почетак кренути од правилних или делимично правилних фигура којима се може поплочати раван.



Надовезујући се на идеју насридске кости и уводећи у игру огледало, можете пробати с децом једну једноставну, али очаравајућу активност Рафаела Переза Гомеза.¹¹

Задатак је да се помоћу дуплог огледала с фиксираним углом или помоћу полупровидних пластичних листова (*Mira*, види стр. 19) од означене фигуре на слици направе преостале фигуре, што ће подстаћи ученике да стварају и препознају симетрије.

Поред свега што смо споменули, Геотабла такође нуди бројне активности које се могу искористити као прави тренинг за конструисање геометријских фигура.



Закључак

Верујемо да активности инспирисане симетријом представљају добар пример за проверу хипотезе да не постоје „небитна“ математика или „мали“ математичари. Другим речима, добро осмишљене активности намењене млађим ученицима садрже карактеристичне елементе

¹⁰ Династија Насрида (1238 –1492) била је последња муслиманска династија у Шпанији.

¹¹ Рафаел Перез Гомез (*Rafael Pérez Gómez*, Гвадикс, 1949) је професор на Одсеку за примењену математику Универзитета у Гранади, познат по истраживањима које је скоро четири деценије спроводио на шпанском утврђењу и дворцу Алхамбри.

математичког мишљења који могу бити од користи чак и старијим ученицима који већ имају изграђене напредне вештине.

Овде је реч о дискусији која је почела пре неколико година, током једног издања конференције Матрикс у којој су учествовали многи партнери СМЕМ пројекта. Дискусија нам је омогућила да упоредимо предлоге и искуства. Овај нови контекст обогаћује нашу палету образовних понуда коју ћемо у наредним месецима предочити васпитачима и наставницима у области утицаја сваког од партнера.

Мислимо да искуство које ће уследити садржи све ове елементе: циљани и мотивишући контекст и језик, аналогни и аналитички приступ, различите степене тежине, коришћење стратегија, подстицање креативности и стицање различитих вештина.

Требало би напоменути да, иако је наш сусрет с овим материјалом био случајан, ресурс је брзо открио своју прилагодљивост нашој двострукој циљној публици: деци узраста од три до осам година и њиховим наставницима и васпитачима.

Оригинални предлог, слагалица која се заснива на симетрији под називом *Baikonur*,¹² аутора Александера Мађарића (*Alexander Magyarics*), јесте изазов да се три дела сложе на начин да формирају један облик који поседује осу симетрије.

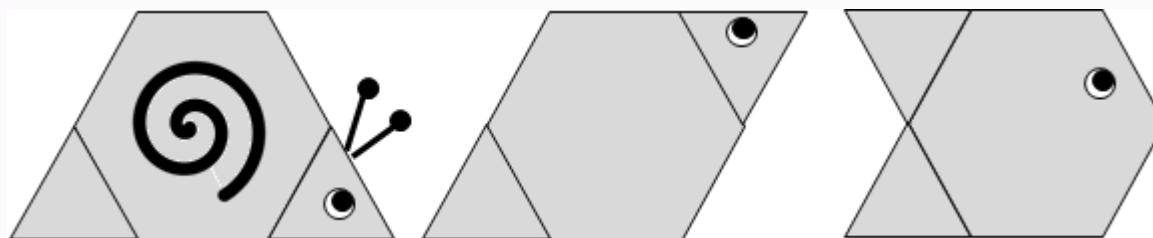


Иако овај изазов може бити претежак за малу децу, облици су сугестивни, а уз то можете почети с мање сложеним активностима.

Ејми у новој симетричној авантури (са задацима)

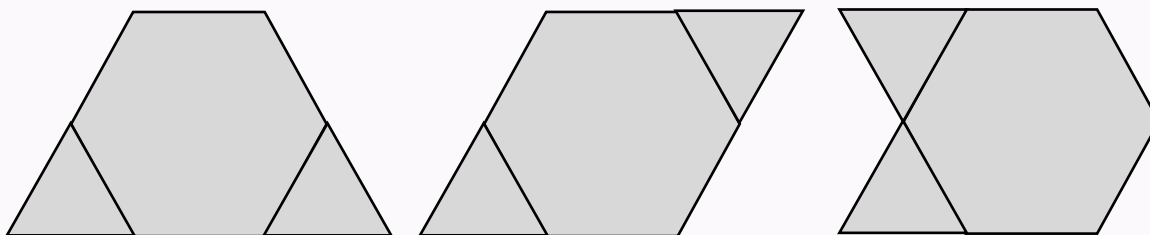
Ејми жели да посети своју пријатељицу, кита Хеди.

Њени пријатељи су жељни да јој помогну — упознајте Пужа Сема, Мрмота Марију и Рибицу Франсоа.



¹² Baikonur (Бајконур) је назив космодрома у Казахстану, једног од најпознатијих и највећих свемирских лансирних комплекса на свету. Сама реч на казахском језику значи „богато брањено место“ или „место са богатом земљом“. Могуће је да је та реч употребљена за назив слагалице због силуете космодрома која мало личи на њене делове (уверите се сами помоћу Гуглових мапа!).

Задатак 1: Пронађите осу симетрије сваке фигуре (овде ће вам бити од помоћи огледало).



Три пријатеља у паровима по двоје, током различитих дана, траже начин да помогну Ејми да отпутује и да нађе Хеди на мору.

Сем и Марија праве чамац, али је он превише нежан за снажне морске таласе.

Сем и Франсоа праве кану, али је он премали да Лија Ејми стане у њега.

Марија и Франсоа предлажу ракету, али је она превише бучна.

Задатак 2: Пронађите осу симетрије облика добијених спајањем два по два елемента (од три, с тим да увек морају имати заједничку бар једну страну или неки њен део).

И тако долазе до закључка да сво троје треба да раде заједно.

Доносе одлуку да направе једрилицу како би могли да стигну до Хеди.

Али чак и ако би Рибица Франсоа морао познавати тајне течног окружења, Ејмини пријатељи нису вешти поморски столари, а чамац цури!

И поред тога што рупа није на дну трупа чамца, јасно им је да ће га таласи потопити!!

Изазов 3.1 Комбиновањем три облика изградити силуету једрилице, симетричну и у складу са правилима (једна страна или део једне стране мора им бити заједнички).

Схвативши да им бродоградитељске вештине нису на високом нивоу, пријатељи су се одлучили да направе једноставнији чамац.

„А да направимо кану?“ – предлаже Сем.

„Може, али да буде већи од оног који сте Франсоа и ти дизајнирали“ – рекла је Марија.

И тако су успели.

Изазов 3.2 Комбинујући три облика, изградите силуету кануа, симетрично и у складу с правилима (једна страна или део стране да буде заједнички).

И били су спремни да га покажу Ејми.

Хеј, али... где је нестала Ејми?

Изазов 3.3 Комбинујући три облика, изградите силуету Ејми, симетричну и у складу с правилима, тако да личи на лого пројекта СМЕМ (али тако да унутар структуре буде празан простор у облику троугла).

И тако је Ејми успела да пловећи преко мора пронађе Хеди.



Уклапање облика

Дефиниција уклапања облика

Уклапање облика у вртићу је забавна и образовна активност која омогућава малишанима да унапреде разумевање облика, основна знања из геометрије и вештину решавања проблема.

Ево неколико предлога активности састављања геометријских облика за вртићки узраст:

- **Слагање задатих облика:** обезбедите једноставне изазове које чине делови у облику различитих геометријских фигура. Деца треба да пронађу одговарајуће елементе како би формирала задату слику или допунила задату фигуру.



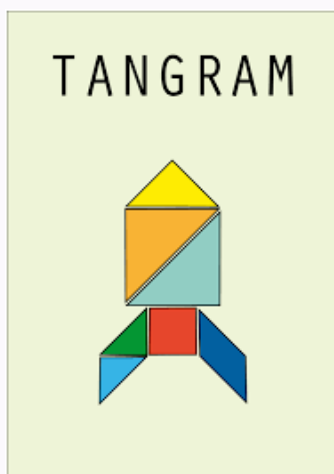
Игра Le Kéor (Кеорс) - © Fermat Science

- **Грађење помоћу тродимензионалних елемената:** користите плочице или коцке за игру различитих основа (квадрати, троуглови, кругови, итд.) и подстакните децу да креирају структуре користећи те облике.



Игра Fractionary- © Fermat Science

- **Колажи с облицима:** дајте ученицима различите папирне фигуре (кругове, квадрате, правоугаонике, троуглове) у боји. Нека стварају задате слике или произвољне шаре лепљењем тих фигура на лист папира.
- **Игре с Танграмом:** Танграм је загонетка која се састоји из седам различитих геометријских фигура. Деца могу да манипулишу њима како би формирала различите структуре и тако да развијају вештину препознавања облика.



Танграм - Crédits OpenClipart

- **Креирање људских ликова:** подстакните децу да стварају људске ликове помоћу геометријских облика којима ће приказати тело, очи, нос, итд. Успут могу смишљати приче којима ће објашњавати своје креације.
- **У потрази за обликом:** Током шетње у природи поставите ученицима изазов да уоче предмете које чине задате фигуре попут кругова (точкови аутомобила), правоугаоника (prozори куће) итд.



Matemaths - © Fermat Science

- **Облици у природи:** Истражујте заједно природу док сте у шетњи с децом и потражите примере геометријских фигура и тела у свету око нас, као што су троугаони листови или округли каменчићи.

Ове активности омогућавају деци да се забављају развијајући осећај за уочавање облика и геометрију, што чини основу њиховог будућег математичког образовања.

Веза с наставним планом и програмом

Концепт уклапања облика игра фундаменталну улогу у наставном плану и програму за први циклус математике. Овај циклус, који обухвата децу узраста од три до шест година, покрива

кључни период когнитивног развоја и припреме за формалније математичко образовање. Истраживање геометријских облика и њихова физичка манипулација у раном узрасту од суштинског су значаја за постављање темеља за разумевање математике.

Као прво, ученици се подстичу да се играју различитим геометријским облицима и да их истражују користећи опипљиве материјале. Тако уче да идентификују ове облике у свом свакодневном окружењу кроз играчке, предмете или чак архитектонске елементе. Захваљујући том почетном кораку млађи ученици се упознају с основним облицима: круговима, квадратима, троугловима и правоугаонцима.

У следећој фази уче да именују ове облике, чиме богате свој математички речник. Такође стичу вештине у разликовању својстава облика, као што је препознавање једнаких страница код квадрата или правих углова код правоугаоника. То је витални корак у развоју њихових способности да комуницирају и тачно описују облике.

Изградња геометријских облика је суштински значајна педагошка активност. Деца почињу да граде сложеније структуре користећи ове основне облике, чиме развијају своју креативност и унапређују вештину сналажења у простору. Те активности их припремају и за лакше усвајање напреднијих идеја с којима ће се срести касније као што су симетрија и колинеарност, па чак служе и као увод за сусрет с тродимензионалним геометријским телима.

Укратко, концепт уклапања облика у наставном плану и програму математике намењеном најмлађима чини кључни корак у успостављању добре основе за учење геометрије и припрему ученика за усвајање комплекснијих математичких концепата с којима ће се сусретати како напредују на свом образовном путу. Такође унапређује развој математичког језика, просторног размишљања и креативности док истовремено пружа деци позитиван први утисак о математици.

За почетак следећег циклуса (који обухвата узраст од шест до осам година), деца настављају учење математике тако што утврђују основе стечене у првом циклусу. Други циклус почиње темељним истраживањем геометријских облика. Ученици, који су сада довољно добро упознати с квадратима, правоугаонцима и троугловима, могу ићи даље, тј. могу се посветити ређању тих основних облика, решавајући разне изазове и математичке загонетке које их позивају да конструишу сложене фигуре.

Кроз сусрет с тродимензионалним облицима, тј. геометријским телима, ученици откривају трећу димензију. Уче да стварају коцке, цилиндре, призме и друга тела помоћу којих је могуће изградити фасцинантне тродимензионалне структуре. Кроз ове активности, ученици не само да усвајају идеју геометријског тела, већ и унапређују своју вештину сналажења у простору кроз интеграцију тих облика у нове, сложеније структуре.

Уклапање геометријских фигура и тела превазилази једноставну манипулацију основним елементима. Додатно, оно служи као основа за учење о особинама симетрије, колинеарности и компланарности, основних геометријских идеја. Ученици настављају да истражују и идентификују геометријске односе, чиме јачају своје разумевање наведених геометријских идеја у конкретном контексту.

Коначно, састављање геометријских фигура помоћу елемената за игру у облику основних геометријских облика природно се повезује с другим математичким вештинама. Ученици почињу да усвајају концепте обима и површине док се играју с дводимензионалним геометријским фигурама, што побољшава њихово опште разумевање математике и додатно развија способност да холистички решавају проблеме.

Експонати из пројекта СМЕМ који су засновани на уклапању облика

Употреба математичких експоната који истражују концепт уклапања облика је zgodна прилика да се пробуди радозналост ученика и да им се пружи могућност да закораче у фасцинантни свет математике. Ови експонати имају за циљ да упознају ученике, од самог почетка њиховог образовног пута, с низом кључних појмова и вештина везаних за геометрију и просторно размишљање.

У наставку је списак једанаест модула који су саставни део отвореног пројекта СМЕМ, а заснивају се на идеји уклапања облика:

- Модул 1 Шумска загонетка
- Модул 2 Слатке пите
- Модул 3 Девет лисица
- Модул 4 Даброва брана
- Модул 5 Коцкица, коцкица, коцка
- Модул 6 Коцке за цртање
- Модул 7 Кућице за животиње
- Модул 8 Градимо мостове
- Модул 9 Крила у боји
- Модул 10 Направи ми крила
- Модул 11 Радосни комшилук

Неке могуће везе међу експонатима

Пример 1: Репродуковање облика

Предлажемо занимљив педагошки низ активности који је фокусиран на тему репродукције облика комбиновањем неких од наведених модула. Да бисмо га развили ослонићемо се на три експоната: *Коцке за цртање*, *Направи ми крила* и *Крила у боји*. Они нуде занимљиву перспективу процеса репродукције облика. Током наведених активности деца ће имати прилику да истражују идеје симетрије, шара и понављања образаца развијајући упоредо своју вештину запажања, али и своју креативност. Ако их подстакнемо да стварају сопствене радове инспирисане овим експонатима, помоћи ћемо унапређењу индивидуалног изражавања док истражују основне идеје активности понављања задатих облика.

Пример 2: Конструкција у простору

Наш следећи предлог чини низ педагошких активности које се фокусирају на просторну конструкцију и самим тим унапређују код ученика свест о простору и положају у њему. Можемо користити следеће модуле: *Даброва брана*, *Коцкица до коцкице – коцка*, *Кућице за животиње* и *Градимо мостове*. Сви ти експонати нуде вишедимензионални приступ истраживању конструкција и свести о простору и пружају ученицима прилику да развијају вештину решавања проблема, да обогаћују своја геометријска знања, да унапређују своју свест о простору и међувршњачку сарадњу.

Пример 3: Математичка логика

Захваљујући пројекту СМЕМ добили смо сјајну прилику да осмислимо стимулативни низ педагошких активности који се фокусира и на математичку логику. Користићемо оригиналне експонате: *Шумска загонетка*, *Девет лисица* и *Радосни комшилук*. Они нуде широке

могућности за истраживање математичке логике у различитим облицима. Забављајући се, ученици кроз игру имају прилику да развијају своје логичко размишљање, да побољшају вештину решавања проблема и да унапреде математичка знања. Решавајући математичку загонетку коју поставља експонат *Радосни комшилук*, откривајући тајну експоната *Девет лисица* и решавајући *Шумску загонетку*, ученици могу практично применити сложене математичке концепте.

Пример 4: Растављање бројева

Конечно, могуће је осмислити читав низ стимулативних педагошких активности заснован на идеји растављања бројева на основу експоната *Слатке пите*. Он омогућава визуелни приступ озбиљном истраживању растављања бројева кроз игру.

Примери активности које користе исте материјале

У овом поглављу истражићемо неколико примера додатних активности које се могу спровести помоћу образовног материјала који доноси пројекат СМЕМ. Активности које наводимо нуде разне опције за јачање разумевања математичких концепата кроз подстицање директног учешћа ученика.

Судок у с геометријским облицима

Судок у с геометријским облицима је креативна и изазовна верзија традиционалне игре Судок у. Уместо бројевима ученици ће попуњавати мрежу геометријским облицима. Циљ је да се сви облици распореде у мрежу тако да се ниједан не понавља у истом реду, колони или блоку. Ова активност јача логичко размишљање, побољшава вештину решавања проблема и доприноси бољем разумевању облика. Деца морају анализирати просторне односе између облика да би успешно решила загонетку.

Танграм: Истраживање облика

Танграм је скуп од седам геометријских плочица од којих се састављањем ствара велики број фигура. Ученици могу да истражују особине његових делова, да их упоређују и комбинују како би створили сложене облике. Ова активност јача разумевање облика, геометријских трансформација и идеје симетрије. Док размишљају како се појединачни делови уклапају у различите фигуре, деца такође развијају и своје просторно размишљање.

Поплочавање: Понављање образаца

Активност попличавања подразумева коришћење геометријских облика за стварање шара које се понављају на равној површини. Ученици могу да истражују како се облици уклапају да би покрили површину без празнина или преклапања. Тиме јачају своје разумевање образаца, правилности, трансформација и идеје попличавања. Деца могу креирати уметничке шаре или репродуковати сложену математичку попличавања.

Фриз: Стварање шара које се понављају

Фриз је низ шара који се понављају и могу се користити за украшавање ивица или површина. Ученици могу да користе геометријске облике за прављење фризова тако што ће понављати шаре или низ шара. Ова активност вежба креативност и разумевање образаца који се понављају. Док стварају фризове, ученици имају прилику да истражују идеју симетрије.

Слободна конструкција

Омогућавање ученицима да истражују слободне конструкције с геометријским облицима одличан је начин да се стимулише њихова креативност и ојача њихово разумевање геометријских идеја. Током активности могу да креирају разне шаре, скулптуре, сложене конструкције и још много тога користећи дате облике као градивне блокове. Такве активности подстичу јачање свести о простору, унапређују вештине решавања проблема и откривања геометријских својстава кроз практично искуство. Ученици такође могу да сарађују како би изградили веће и сложеније структуре, чиме јачају своје вештине комуникације и тимског рада.

Наведени примери додатних активности илуструју разноврсност образовног материјала заснованог на геометријским облицима. Интеграцијом ових активности у наставу можете понудити ученицима читаву лепезу стимулативних образовних искустава којима ће јачати своје разумевање математичких концепата, истовремено унапређујући креативност и критичко мишљење. Рад с опипљивим материјалима као што су геометријски облици омогућава ученицима да истражују математичке теме на практичан и занимљив начин, што повећава њихов ентузијазам за учење математике.



Слободна конструкција - © Fermat Science

Закључак

Уклапање облика у вртићком узрасту је вредан образовни приступ за развој мале деце. Ова тема нуди многе занимљиве активности које јачају разумевање облика, просторно размишљање, креативност, решавање проблема и обезбеђују добру припрему за напредније математичке концепте.

Примери активности представљени у овом поглављу указују на богатство и разноврсност искустава учења која се могу понудити ученицима, а користе образовни материјал који је већ формиран у оквиру пројекта СМЕМ, као што су геометријски облици. Уклапање ове теме у наставни план и програм потпуно је у складу с образовним циљевима развоја математичких вештина од најранијег узраста формалног образовања.

Експонати створени у оквиру отвореног пројекта СМЕМ пружају солидну основу за стварање повезаних педагошких низова. Ови модули промовишу истраживање, откривање и практичну примену математичких концепата, истовремено подстичући радозналост ученика. Могуће везе између модула отварају врата интердисциплинарном приступу учењу, где ученици могу да истражују математичке концепте и истовремено развијају вештине у другим областима, као што су комуникација, креативност, решавање проблема и критичко мишљење. Додатне

комплементарне активности (Судоку с геометријским облицима, Танграм, поплочавање, прављење фризова и слободна конструкција) пружају још богатије могућности учења.

Коначно, уклапање облика у вртићу није само забавна активност. Оно поставља чврсту основу за припрему ученика за њихово математичко путовање, јача изградњу математичког знања, истовремено распирујући код најмлађих страст за математиком. Ова тема доприноси стварању стимулативног образовног окружења у ком ученици могу радити на разумевању света око њих с математичке тачке гледишта. Улагањем у овај иновативни педагошки приступ доприносимо обликовању нове генерације страствених и компетентних математичара спремних да се суоче с изазовима сутрашњице.

Посматрање и бројање

Математичке идеје посматрања и бројања намењени деци

Математички језик нас окружује почевши од најраније фазе нашег живота. То је чињеница која противречи уобичајеном веровању да се људи рађају с талентом за математику или без њега. Математика је важна животна вештина која се може стећи и усавршавати учењем, чиме се руши мит да је за успех у овој области потребан урођени таленат. Свако поседује потенцијал да разуме математичке концепте и развије стручност, без обзира на почетне способности. Кључ је у прилагођеном и персонализованом приступу учењу, усклађивању наставе с индивидуалним интересовањима и тренутним нивоима знања. Прихватањем чињенице да је математика вештина која се учи, оснажујемо ученике да предметна знања усвајају са самопоуздањем, чиме подстичемо ментални склоп који прихвата промене, истраживање, радозналост и континуирано усавршавање. Овај инклузивни приступ омогућава да математика постане приступачно и пријатно искуство за свакога, чиме се промовише идеја да математика није таленат који се наслеђује већ вештина која се стиче и гаји кроз труд, праксу и одговарајућу образовну подршку.



За децу од три до осам година, темељи математичког мишљења постављају се кроз бројање и посматрање.

Бројање пружа опипљиву полазну тачку за откривање света математике тако што омогућава деци да схвате бројеве и да их исправно користе. Кроз бројање деца почињу да препознају нумеричке обрасце, развијају интуитиван осећај за количину и јачају разумевање концепата као што су сабирање и одузимање. Штавише, бројање побољшава њихову вештину посматрања захваљујући томе што захтева уочавање разлика и сличности између објеката. Тиме бројање отвара пут сложенијем математичком размишљању које ће уследити касније. Такође им улива осећај за ред и организацију, што су суштински важни

математички принципи. Бројање не само да пружа деци практичан алат за свакодневно решавање проблема, већ и негује њихову математичку радозналост и самопоуздање, постављајући основу за доживотну авантуру математичког истраживања и открића.

Посматрање није само гледање; то је и уочавање детаља, образаца и односа. Ова вештина је кључна не само за математичко размишљање, већ и за целокупни когнитивни развој деце, јер негује њихову способност да препознају обрасце, односе и детаље у свету око себе. Кроз пажљиво посматрање деца уче да идентификују облике, величине, боје и просторни распоред, што су основни математички концепти. Поред тога, посматра-



ње природе, објеката, па чак и свакодневних рутина, омогућава им да схвате концепте као што су симетрија, уређивање и мерење, подстиче их да постављају питања, износе хипотезе и изводе закључке – то је процес сличан научном методу, који подупире математичко истраживање. Тај процес пажљивог посматрања не само да подстиче математичку радозналост, већ негује и вештину критичког мишљења која је од виталног значаја за способност решавања проблема и математичко резонување. У суштини, посматрање постаје лупа кроз коју деца перципирају и истражују математичке концепте, те тако постаје основа над којом се гради њихово разумевање математике.

Пре него што наставимо, ево неколико примера из свакодневног живота који су лако доступни родитељима и наставницима за увежбавање концепата посматрања и бројања.



Прављење наруквице од дрвених перли: активности које се ослањају на занате пружају одличне могућности за бројање и уочавање образаца. Током процеса прављења наруквице тражите од детета да изабере перле различитих боја и величина. Док нижу перле на канап, деца могу вежбати бројање и креирати различите шаре.

Лов на благо у природи: прошећајте кроз парк или двориште и направите листу за лов на благо која ће садржати предмете за посматрање и бројање. На пример, „Пронађи три различите врсте листова“ или „Изброј колико птица видиш“. Ова активност подстиче вештину посматрања и осећај за бројеве.

Потрага за морским шкољкама на плажи: прошећајте обалом са својим дететом, бројте и посматрајте заједно колико различитих врста шкољки можете пронаћи. Које шаре или облике примећујете? Бројање морског блага може претворити шетњу плажом у математичку авантуру.



Бројање звезда: у ведрој ноћи распрострите ћебе на траву и посматрајте звезде са својим дететом. Пребројте видљиве звезде и укажите им на сазвезђа. Ова активност негује вештину бројања и способност уочавања образаца на ноћном небу.

Набавка намирница: током куповине укључите своје дете у процес тако што ћете га задужити да преброји артикле које стављате у корпу. Реците му, на пример, „хајде да ставимо у колица три јабуке“ или „треба нам десет јаја“. Ова једноставна активност ставља акценат на бројање у контексту света који нас окружује.

Заједничко кување: кување нуди прегршт могућности за бројање и посматрање. Нека дете изброји колико је потребно неког састојка за рецепт, нпр. шољи брашна или кашичица шећера. Такође може посматрати како се састојци мењају током процеса припреме хране.

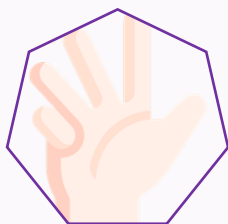
Ови примери показују како се посматрање и бројање могу неприметно увести у наше свакодневне активности чиме обогаћујемо дечје разумевање математике, и истовремено подстичемо потребу за постављањем питања о свету око нас. У наредном одељку бавићемо се специфичним активностима и радионицама инспирисаним пројектом СМЕМ, који је осмишљен да учини математику занимљивим и радосним искуством за децу.



Веза с наставним планом и програмом

Квалитетно математичко образовање за малу децу подразумева усклађивање наставних метода с циљевима наставног плана и програма. Пројекат СМЕМ пружа вредан оквир за укључивање математичких идеја посматрања и бројања у наставни план и програм за децу узраста од три до осам година.

У вртићу се деца уводе у свет математике кроз активности засноване на игри и кроз истраживачке активности. Бројање и посматрање су од фундаменталног значаја за ову фазу учења.

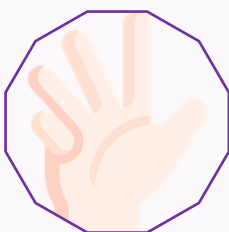


Наставни план и програм за вртићки узраст обично укључује основне вештине бројања, где деца уче да броје од један до десет и даље. Бројање је интегрисано у свакодневне рутине кроз бројање присутне деце, предмета који се користе у игри или корака током шетње природом. Те свакодневне активности не само да развијају нумеричку свест, већ и унапређују језичке вештине.

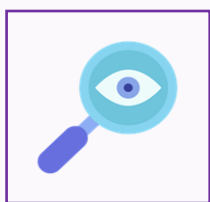


Посматрање у вртићком узрасту подразумева помагање деци да уоче детаље у свету који их окружује. Ту спадају препознавање облика у свакодневним предметима, препознавање образаца који се понављају на њиховој одећи или у учионици, или посматрање како предмети мењају величину, боју или положај. Ова запажања постављају основу за препознавање и уочавање образаца и критичко размишљање.

Како деца стасавају за основну школу, математички концепти постају свеобухватнији и добијају чвршћу структуру. Вештине бројања и посматрања и даље играју виталну улогу у наставном плану и програму.



У наставном плану и програму за основну школу бројање добија нову димензију кроз сложеније задатке и увођење сабирања и одузимања. Ученици не само да пребројавају разне предмете, већ уче и да сабирају и одузимају бројеве унутар одређених опсега. Бројање постаје алат за решавање проблема из стварног живота, као што је израчунавање укупне цене артикала купљених у продавници или равноправно дељење предмета међу друговима из разреда.



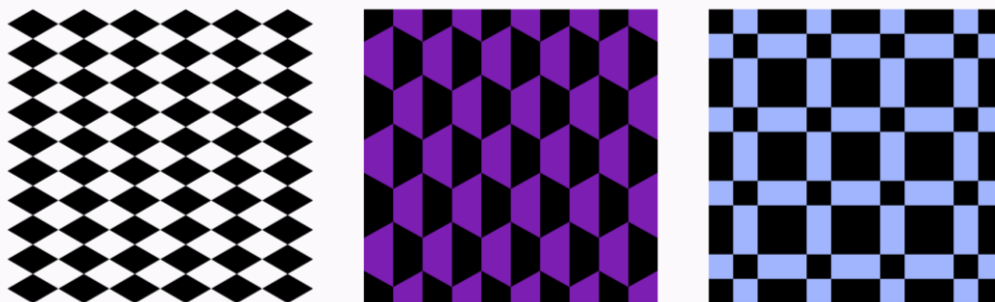
Вештине посматрања у основној школи превазилазе препознавање и уочавање образаца у предметима. Ученици се подстичу да посматрају и тумаче податке, графиконе и графике. Уче да критички анализирају информације, праве предвиђања и изводе закључке. Овај вид посматрања је од кључног значаја за разумевање концепата као што су представљање података и статистика.

Експонати из пројекта СМЕМ засновани на бројању и посматрању

Хајде да бројимо

Експонат *Хајде да бројимо* позива ученике да упаре жетоне са сликама инспирисаним шумском темом с бројевима од један до десет који су означени на табли. Један од начина да се ова активност одведе корак даље у учионици јесте употреба теселација. Теселације су дводимензиони геометријски шаблони који се међусобно надовезују без празнина и преклапања и могу

се бесконачно настављати у свим правцима. На сликама које следе приказани су примери теселација које користе правилне многоуглове.



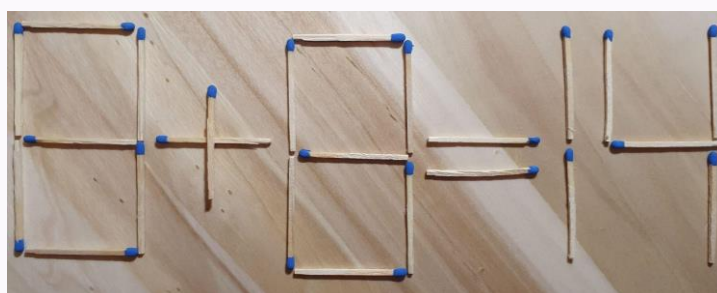
Примери теселација које користе многоуглове (ромб, трапез тј. шестоугао, квадрат)

Пример активности која користи теселације у комбинацији с бројањем може бити да ученици изаберу неколико различитих облика који се могу користити за креирање шаре или шаблона, најбоље је да их буде до четири, али могу пробати и само с једним. Такође се може увести игра *Уочи разлику* у којој треба пронаћи облике који не припадају шари или шаблону.



Ове активности се могу проширити током шетње кроз природу када би деца могла креирати шаре или шаблоне помоћу елемената из природе као што су камење, лишће, бобице, цвеће, шкољке итд.

Још један пример активности која се може практиковати ради побољшања математичких вештине јесте да се решавају загонетке са шибицама, када се од њих граде бројеви уз одређена ограничења као што је померање или уклањање само једне или само две шибице како би се добила тачна једнакост или збир. У доњем примеру можете увести ограничење да се мора уклонити једна и померити једна шибица да би збир постао тачан.



Још једна активност за вежбање сабирања или множења може бити игра проналажења сабирака који дају тражени збир. Постоје два начина да се приступи овом задатку: или да се деци каже збир и да им се да могућност одабира колико различитих бројева треба сабрати да би се дошло до траженог збира, или да им се откривају карактеристике појединачног сабирка на основу питања на која се може одговорити са да или не.

Примери таквих питања могли би бити:

- Да ли је број већи од 20?
- Да ли је број непаран (или паран)?
- Да ли је број дељив с два (или с три)? (Ово питање може се поставити старијој деци).

Након што открију број, можете им поставити задатак одређивања свих могућих комбинација бројева који дају тражени збир.

Ово је такође једна од zgodних тема за увођење игре *Откриј уљеза*. За њу је потребно припремити четири слике или четири предмета с особином да три по три деле заједничку карактеристику која омогућава да се четврта ставка искључи као уљез, али да не постоји јединствени тачан одговор јер се, под различитим условима, свака ставка може искључити – само треба пронаћи одговарајући разлог за то.



Змијица II

Игру *Змијица II* играју два ученика тако што бацају коцкице и померају своје жетоне за одговарајући број поља према вредности коју су показале коцкице. Један начин да се активност прилагоди деци од шест или седам година јесте коришћење две коцкице у две различите боје (нпр. црвена и плава), где број на црвеној коцкици одређује за колико ће поља жетон ићи напред, а број који покаже плава коцкица одређује за колико ће поља жетон ићи назад. Кроз такву игру деца могу вежбати одузимање.

Бројање уз плескање рукама уводи ритам у бројевне обрасце. Окренути ка детету (или деца у паровима окренута једно према другом) појединачно обоје плеснете длановима, а затим плеснете једно другог са оба длана. Када довољно добро увежбате те покрете, укључите образац бројања који обоје изговарате наглас док плескате рукама. На пример, плесак, три, плесак, шест, плесак девет, плесак, дванаест... Онај ко почиње први управља брзином плескања, док онај ко је други треба да га прати, па се у тим улогама смењујте.

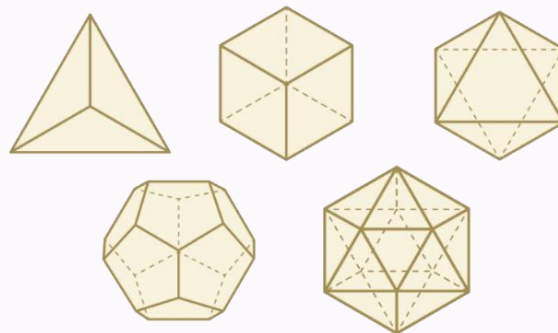
Можете играти и игру *Двадесет*. У питању је игра бројања у којој се двоје смењују у бројању од један до двадесет с циљем да наведу противника да каже „двадесет“. Дозвољено је бројати по један, два или три броја. Постоји победничка стратегија која није очигледна, иако бисте могли покушати да помогнете деци да је открију кроз наговештаје. Циљ се може померити с двадесет на неки већи број, можете бројати по два или по три, или укључити трећег играча. Поред тога, кад се играте с млађом децом можете користити двадесет новчића или жетона уместо да бројите наглас.

Пребројавање страна

Током активности *Пребројавање страна* ученици бацају коцкице и траже геометријско тело које има исти број страна као број који су показале коцкице. Ова активност је погодна и за млађу децу јер комбинује бројање и геометрију. Задајте деци да формирају троугао испруженим рукама. Када формирају троугао, направите фотографију и затражите им да

преброје колико је руку било потребно да би се решио задатак. За корак даље, док посматрају троугао, тражите од ученика да изброје колико је још руку потребно да се тај троугао претвори у тетраедар.

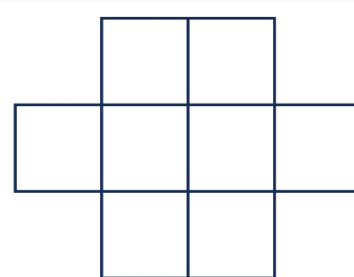
За старију децу, активност се може проширити тако што ћете тражити од њих да преброје ивице и темена и да посматрањем закључе који су услови неопходни да би фигура имала ивице или темена. Такође можете им дати задатак да направе Платонова тела користећи магнетне штапиће, како би вежбали визуелизацију геометријских облика.



Радосни комшилук

У оквиру даљих истраживања овај експонат може се користити с измењеним правилима и постојећом таблом или с постојећим правилима и промењеном таблом.

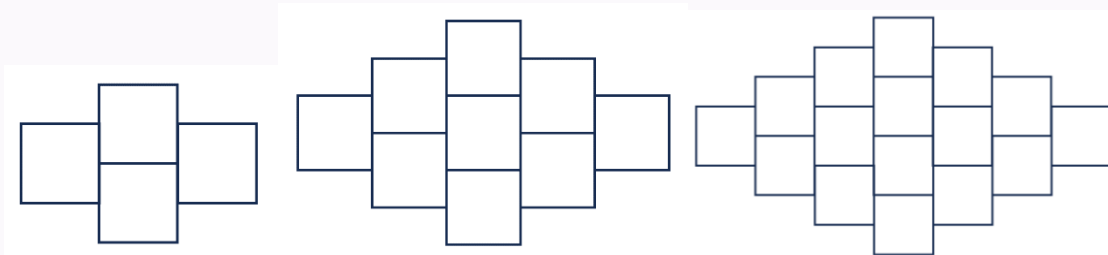
Прва опција би била да се уместо боја уведу жетони с бројевима од један до девет, уз слично правило: узастопни бројеви не би требало да буду комшије на табли. Колико различитих начина постоји за постављање жетона тако да се испоштује задато правило?



Број поља на табли би се могао мењати тако да задаци постепено постану тежи за решавање. Могло би се почети с таблом од осам квадрата распоређених као што је приказано на слици с десне стране.

Правило је распоредити жетоне с бројевима од један до осам тако да узастопни бројеви немају нити заједничку страну, нити заједничка темена. Ако радите с млађом децом, уместо да користите бројеве, можете користити жетоне у три боје, с три различите опције за правило: жетони исте боје немају ни једну страну заједничку, нити једно теме заједничко или само немају заједничку страну али могу имати заједничко теме (теорема о четири боје). Колико боја је потребно за ову таблу? Ако је правило јаче (исте боје немају заједничку страну нити теме) требале би нам четири боје, али уз правило да могу да имају заједничко теме биће три боје довољне.

Трећа верзија је истраживање како проширити ову таблу додатним квадратима да би се могле употребити само три боје и једноставније правило. Ако почнемо с једноставнијом мрежом која има само четири квадрата, можемо ли их попунити жетонима у три боје, да или не? Ако је одговор потврдан, зашто је то тако? Можемо ли наставити с додавањем квадрата? Потребно је најмање четири квадрата за мрежу, затим следи мрежа с девет квадрата, онда са шеснаест, па 25 што је очито квадриран број квадрата у централној колони мреже.

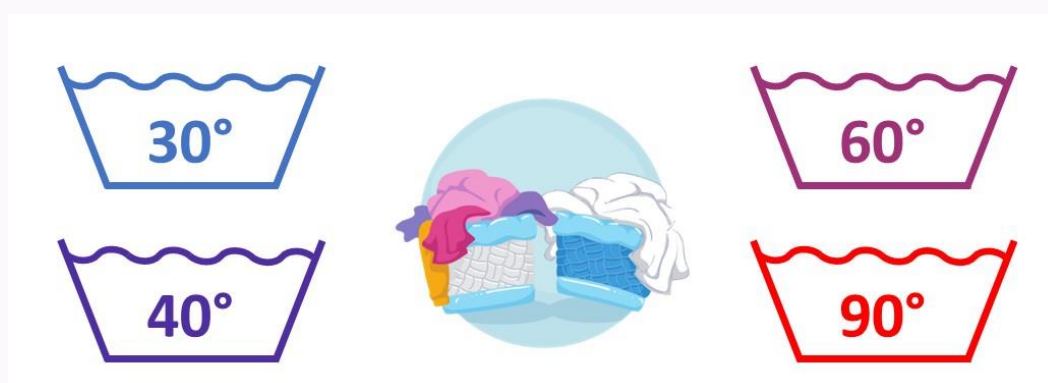


Да ли овде постоји нека веза с Паскаловим троуглом?

Како доказати да правила може задовољити тачно једна верзија табле, управо она с мрежом која се састоји од толико поља колико нам даје квадрирани број квадрата из централне колоне? Постоји геометријски доказ за то, али није погодан за децу млађу од осам година. Понекад једноставан наставни материјал може прикривати вишу математику!

Породице

Експонат *Породице* очекује од ученика да раздвоје предмете у три различите групе на основу правила које сами изаберу. На пример, то могу бити величина, боја и облик. На основу ове идеје могу се организовати разне додатне активности. Једна од њих је разврставање веша за прање по боји или температури прања.



Друга активност би могла бити да ученици уоче и упореде заједничке карактеристике међу собом (као што су висина, дужина косе, одећа и слично) користећи физички Венов дијаграм и картице са категоријама за означавање заједничких особина. Након тога, деца би могла пребројати колико свака категорија има елемената.

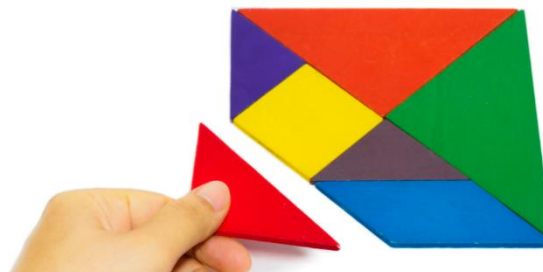
Претходно описану активност претворићете у игру ако дате деци задатак да пронађу друге људе с истим карактеристикама (као што су старост, висина, месец рођења). Ова игра се зове људски бинго. Можете наћи читав низ шаблона на интернету за креирање сопствене варијанте те игре. У наставку следи пример који смо конструисали инспирисани верзијом с адресе <https://myfreebingocards.com/human-bingo>:

Нађи некога ко

не воли да спава	је победио на такмичењу	ко уме да свира неки музички инструмент	ко уме да игра одбојку	ко има најмање слова у презимену
је носио гипс	воли математику	ко говори више од два страна језика	ко има најбољег друга	ко је раноранилац
је јединац или јединица	ко уме да звижди	ко воли чоколаду	ко је видео краву уживо	ко је некад засадио дрво
је летео авионом	ко има више од пет слова у имену	ко је бар једном путовао у иностранство	ко не воли сладолед	ко је рођен у септембру
зна знаковни језик	ко редовно чита штампу	ко има онолико браће колико има сестара	ко има црвену мајицу	ко се плаши мишева

Активност инспирисана игром људског бинга могла би да буде груписање ученика према месецу у ком су рођени, што може бити добар увод у вероватноћу. На пример, у групи која броји више од 24 члана шансе су мало веће од 50% да су две особе рођене истог датума и расту с бројем чланова.

Експонате *Породице* и *Змијица I* (који се заснива на бројању и представља увод у вероватноћу) можете искомбиновати групишући жељене облике или предмете према сопственом нахођењу уз услов да постоји више од једне породице којој припадају. За такву активност можете употребити плочице *Logical Blocks*[®],¹³ које садрже исте облике (крugове, троуглове и правоугаонике) с различитим текстурама, величинама и бојама. Иста активност би се могла спровести и с деловима танграм слагалице.



Змијица I

За проширење експоната *Змијица I* додатном активношћу заснованом на идеји писмо-глава и уводу у вероватноћу, можете с децом играти игру *Камен, папир и маказе* тако што ћете свакој опцији доделити одређену боју. Задатак ученика биће да употребе боју која побеђује у складу са ситуацијом и да, играјући се, преброје колико су пута победили користећи једну од три боје.

	камен	папир	маказе
камен	камен	папир	маказе
папир	папир	папир	маказе
маказе	маказе	маказе	маказе

Како се тениски меч може завршити ако се игра у два или три добијена сета? Ова активност подразумева визуелно представљање мечева с два и три добијена сета помоћу цртежа или налепница на табли, а затим позивање деце да преброје различите начине на које се тениски меч може завршити према овим условима. Деца наизменично обележавају различите исходе мечева на табли, као што су ситуације када један играч осваја све сетове, оба играча освајају подједнак број сетова или различите комбинације освојених сетова за сваког играча. Кроз овај процес деца уче принципе бројања који се користе у истраживању различитих могућности

¹³ У питању су пластичне плочице које производи шпанска компанија Миниланд (*Miniland*). Долазе у пет основних геометријских облика (круг, квадрат, једнакостраничан троугао, правоугаоник и правилни шестоугао), а сви су произведени у две величине, две дебљине и три основне боје.

завршетка тениског меча, чиме се подстиче њихово ангажовање, креативност и развој основних математичких вештина у областима бројања и вероватноће.

Можете такође истраживати и чувени проблем Монтија Хола кроз игру у учионици у којој васпитач или наставник отвара врата по жељи деце, а они затим бирају да ли ће променити свој избор врата или не. Идеја игре је да је увек боље променити изабрана врата него остати при првобитном избору. Може се одиграти неколико рунди игре у учионици и избројати колико пута би било боље да су променили врата. Објашњење логике на којој се заснива овај парадокс може доћи у каснијој фази, када ученици буду били старији.

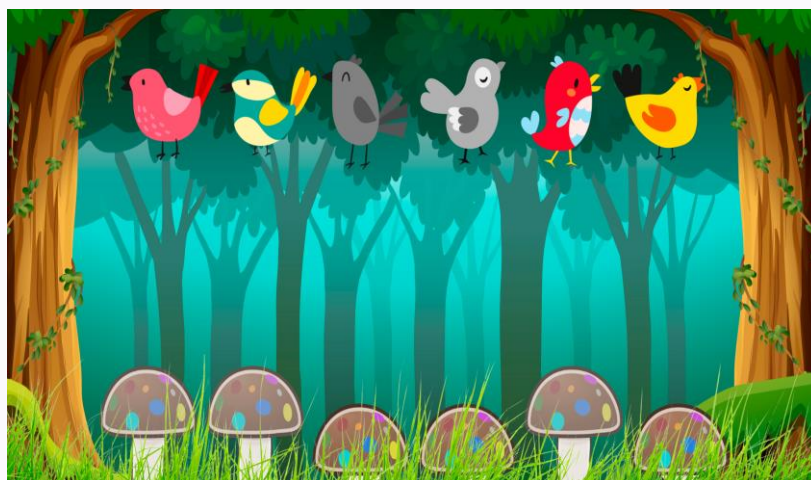


Птичји пој

Апликација *Птичји пој* приказује шест птица („светиљки“) које могу бити упаљене или угашене, и шест печурака („тастера“) који могу бити притиснути или непритиснути. Свака од печурака мења стање једне или више птица, али није нам унапред познато које су птице „повезане“ с којом од печурака. Сваким покретањем игре по принципу случајности креирају се нове везе. Све птице су на почетку игре „искључене“, а циљ је да све буду „укључене“. Свака птица у „укљученом“ стању пева своју песму, а све птице заједно певају један лепо акорд.

Деца ће брзо разумети упутства, али до решења ће доћи тек после много покушаја и грешака. Након одиграних неколико рунди, дете би могло развити неколико стратегија, а наставник би га могао усмерити како би лакше стекло додатне увиде.

Пре него што покушамо решити ову загонетку, потребно је да замислимо евентуално решење. Прво кључно запажање јесте да је редослед којим притискамо тастере потпуно небитан и да двоструки притисак на тастер даје исти резултат као да га уопште нисмо ни притисли. То можда није очигледно на први поглед, па би се могло учинити да се решење састоји од читавог низа притискања тастера одређеним редоследом. Након што схватимо да је редослед небитан,



постаје јасно је да ћемо ову загонетку решити само активирањем одређених тастера. Захваљујући природи овог решења, могуће је користити стратегију набрајања решења (на пример, испробати све могуће комбинације).

Друго кључно запажање јесте да, у општем случају, на неке птице утичу само неки тастери. Ако кроз истраживање утврдимо да стање неке птице мења само један тастер, биће јасно да је тај тастер део коначног решења. Ако на птицу утичу два тастера, онда један од њих (али не оба истовремено, и не ниједан од њих) мора бити притиснут. Према томе, ова два тастера су издвојена од осталих. Могли бисмо најпре тестирати први тастер, а ако он не доприноси решењу, онда пробати и други. Ови налази наводе на дедуктивно закључивање које на крају смањује скуп могућих комбинација сужавајући потрагу за коначним решењем.

Ова техника покушаја и грешака уз помоћ дедуктивног сужавања простора за претрагу спада у оно што називамо „посматрање и бројање“. Бројање може бити сложеније од набрајања објеката. Као прво, укључује опис простора комбинација, а као друго, захтева искључивање неких (или свих) неважећих комбинација које ни не морамо испробавати.

За заинтересоване читаоце, ево математичког описа игре. Загонетку ћемо моделирати помоћу линеарне алгебре. Када је први тастер притиснут, примећујемо да су птице укључене као вектор колона од шест нула и јединица (пишемо један за сваку укључену птицу, а нула у супротном случају). На пример, вектор $(0,0,1,1,0,0)$ означава да су укључене само трећа и четврта птица). Понављамо овај процес да бисмо добили онолико вектора колона колико има тастера, а затим ћемо од њих направити матрицу A . Дакле, за било коју комбинацију k притиснутих дугмади (на пример, $x = (1,1,0,0,0,1)$ као вектор колоне, ако се притисну дугмади 1, 2 и 6), укључене птице приказане су матричним производом $A \cdot x$. Матрице и вектори се морају посматрати по модулу 2 (то јест, сваки паран број замењујемо с нулом, а сваки непаран с јединицом). Решавање ове загонетке је у суштини еквивалентно решавању линеарног система $A \cdot x = (1,1,1,1,1,1)$, што можете урадити употребом било које стандардне методе решавања линеарних система једначина (Гаусова метода, инверзија матрице, итд). Програм бира матрицу A тако да буде инверзibilна, те увек постоји јединствено решење загонетке.

Међу сродне загонетке које се могу предложити деци сличног узраста спада *Lights-out*,¹⁴ електронска игра¹⁵ популарна током деведесетих година двадесетог века која се данас може играти онлајн. Има сличну механику као и апликација *Птичју пој*, и код ње тастери такође укључују светла. Има их 25 и распоређени су у мрежу 5×5 . Сваки тастер укључује своје светло као и светла тастера с једне стране. Константно и предвидљиво повезивање тастера и светала уз мало вежбе олакшава савладавање загонетке, захваљујући препознавању образаца. Слична анализа помоћу линеарне алгебре даје математичко решење.

Коначно, симетрија и парност су међу најчешће употребљаваним и најкориснијим алатима када су у питању активности инспирисане математичким мађионичарством (на пример, *Baby Hummer*¹⁶ или, за стручњаке, општији случај Хамеровог принципа¹⁷) или за проналажење победничких стратегија у друштвеним играма (нпр. игра Ним). Верзија игре Ним¹⁸ која се појављује у француском филму „Догодило се прошле године у Маријенбаду“ величанствени је

¹⁴ <https://www.sfu.ca/~jtmulhol/math302/puzzles-lo.html>

¹⁵ [https://en.wikipedia.org/wiki/Lights_Out_\(game\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Lights_Out_(game))

¹⁶ https://web.northeastern.edu/seigen/11Magic/Hummer/baby_hummer.pdf

¹⁷ <https://magiaymatematicas.blogspot.com/2013/09/el-principio-de-hummer.html>

¹⁸ https://www.archimedes-lab.org/game_nim/play_nim_game.html

пример како симетрија и парност (примењени на бинарни систем) омогућавају да победите у свакој игри.

Фотке с мора

По питању локације и положаја објеката у простору, од ученика се може тражити да упаре одређене фразе с положајем објеката на слици. Рецимо, можете изабрати реч „испред“ и тражити од ученика да одреде који су објекти испред којих. Као следећи корак може се користити геотабла за мапирање положаја животиња у односу на остале животиње. На тај начин ће се играти координатном мрежом која подсећа на Декартов координатни систем.



Штавише, различити предмети који се налазе у учионици могу бити распоређени у склопу сцене за фотографисање, при чему ће ученици користити телефон који је саставни део експоната како би правили фотографије с различитим перспективама. За старије узрасте, током ове активности може се користити и светлост како би научили понешто и о угловима и како би боље разумели одакле долази светлост, узимајући у обзир сенке које бацају различити извори светлости.

Правите исте фотографије с различитих позиција у учионици и након тога погађајте на основу самих фотографија ко их је снимлио (ово је снимљено са леве стране учионице или са задње стране учионице).

Фотографишите исте сцене с различитим размерама оквира (1:1, 3:4, 9:16) и дискутујте о томе како облик оквира утиче на коначну фотографију и све што она садржи.

Путање

Дефиниција путање

Појам путање је један од првих појмова с којим се деца сусрећу док се крећу кроз свет који их окружује и истражују га. Видљиве путање које стварају малишани могу бити трагови штапа у песку, шкработине на папиру или мокар траг који накнадним померањем остави отворена флаша с течностима. Такође би могли посматрати путање које формирају ватромет, авион у лету, звезде падалице, трагови животиња, оловка при писању. Могли би чак разматрати и идеју путање без видљивих трагова. Могућности су бескрајне.

У различитим окружењима путања дефинише простор у којем можете да се крећете: можете ићи улицом или шумском стазом, можете ходати тротоаром, али не можете проћи кроз зидове или зграде. Шумске стазе и сеоски путеви усмеравају кретање пешака, успешно га спречавајући да не залута у шуми или у пољу где је лако изгубити се. Постоји путања од куће до школе коју можете научити, а понекад бисте се могли вратити из школе кући неким другим путем иако су почетна и крајња тачка исте. Да би се пратила нека путања потребна су нам упутства, нпр. иди напред, скрени десно, избегавај препреке или врати се уназад онда када је стаза блокирана неком непремостивом препреком попут ограде или затворених врата.

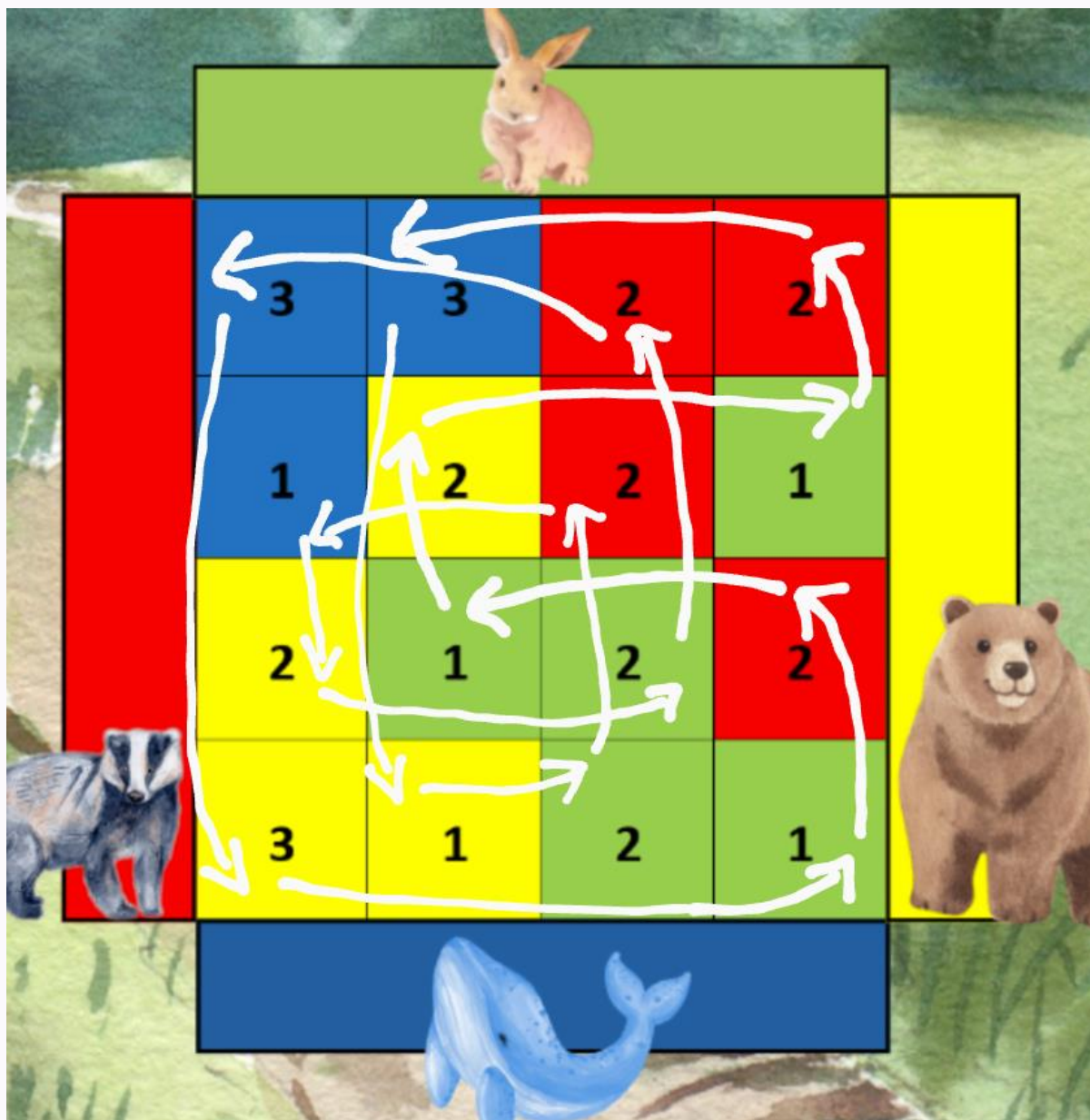
Када је реч о интуитивном концепту, дефинисање путање обухвата две комплементарне перспективе: прво, динамичка дефиниција тумачи путању као трајекторију објекта у покрету (која можда неће оставити видљив траг). Сваки покретни ентитет, било да је у питању особа, животиња, аутомобил, или нешто друго, током кретања оцртава путању која не постоји онда када мирује. С друге стране, статичка дефиниција посматра путању као линију (она не мора бити права) која повезује две тачке у простору, што значи да не захтева кретање. Обе дефиниције постоје у речницима и често имају више симболичних значења. С математичке тачке гледишта ове дефиниције су еквивалентне: скуп тачака које објекат прелази формира криву, а ако је крива позната, можемо навести покретни објекат да је прати. Међутим, деци може бити занимљиво увођење оба концепта. Васпитач или родитељ може покренути дискусију постављајући питање: „Шта је путања?“ и представљајући алтернативне перспективе. Комбиновање предложене дискусије с наведеним активностима може олакшати боље разумевање.

Експонати из пројекта СМЕМ који су засновани на идеји путање

У шетњи с Ејми

„Динамички приказ“ је прикладан опис путање дефинисане низом инструкција: кретање које корак по корак следи упутства оцртава путању. Ова тачка гледишта илустрована је експонатом *У шетњи с Ејми*. Експонат користи таблу с нумерисаним и обојеним квадратима (види илустрацију). Свака од четири боје усмерава кретање ка одређеној страни (лево, десно, горе, доле), а број указује за колико квадрата се треба померити. Дете које препознаје бројеве лако ће поштовати ова једноставна правила. У дискусији која може уследити питања попут „којом сте путањом ишли?“ подстаћи ће децу да изнова креирају своју путању или да се запитају о дефиницији путање којом се већ крећу. Такође их можете упитати да ли примећују било какву

путању на табли. Ово питање изазива увид да, иако експлицитно нацртана путања на табли (статички) не постоји, правила дефинишу имплицитну путању.



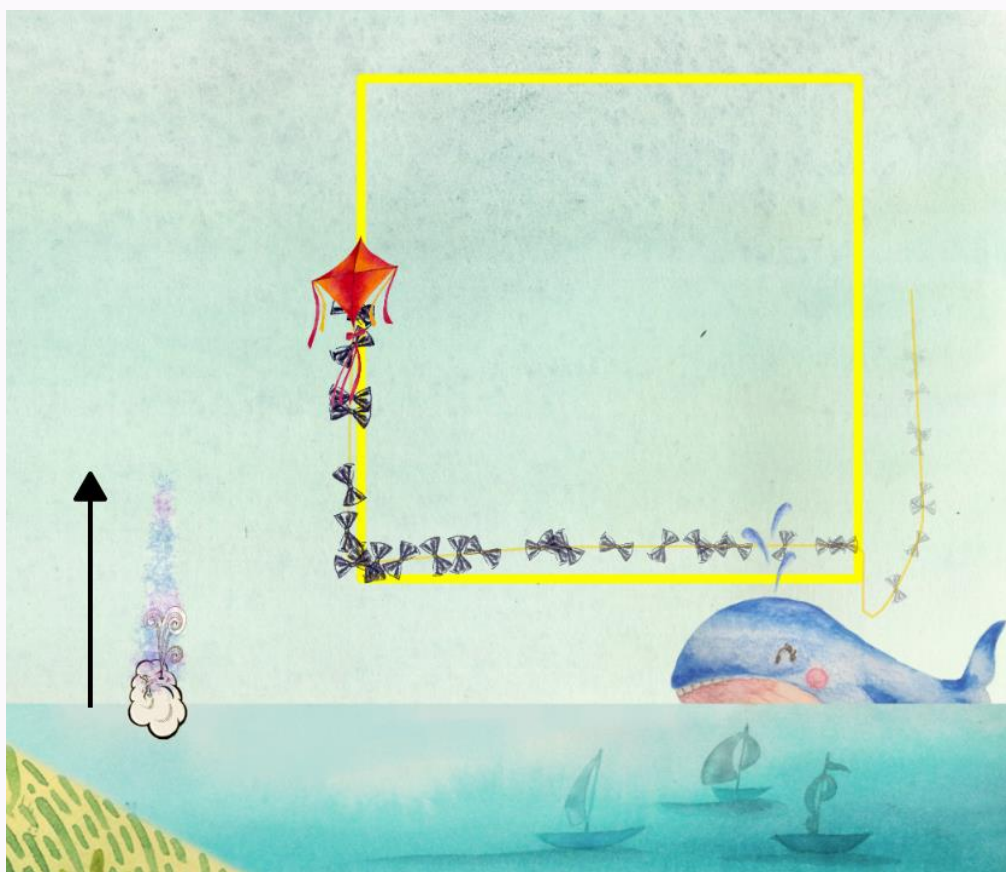
Занимљива питања могу подстаћи истраживање, на пример: „да ли постоји пут који се придржава правила игре, а спаја жуто поље с бројем три и плаво поље с бројем један (или било коју другу комбинацију поља)?“ или „одакле треба да започнем свој пут да прођем кроз...“ . У истом тону, питања попут „да ли ће се моја путања вратити у почетну тачку?“ увешће појам затворене путање. Запажања о путањама које саме себе пресецају, о речима које описују смер (лево и десно, пре и после, напред и назад), као и дискусије о конфигурацији путања могу додатно обогатити искуство открића.

Ако радите са старијом децом (осам и више година), подстакните их да сами направе своју таблу за игру. То би могли да ураде од самог почетка, тако што би нацртали мрежу на папиру или тако што би користили унапред припремљене, обојене и обележене квадрате. Такође, можете променити упутства. На пример: „Ваша табла за шетњу с Ејми треба да има две, три или четири различите путање код којих се, обилазећи таблу, враћате на почетно поље.“ За почетак

активности можете унапред делимично попунити структуру остављајући неколико празних квадрата који ће послужити за истраживање и креативан процес стварања табле за игру.

Срце на небу

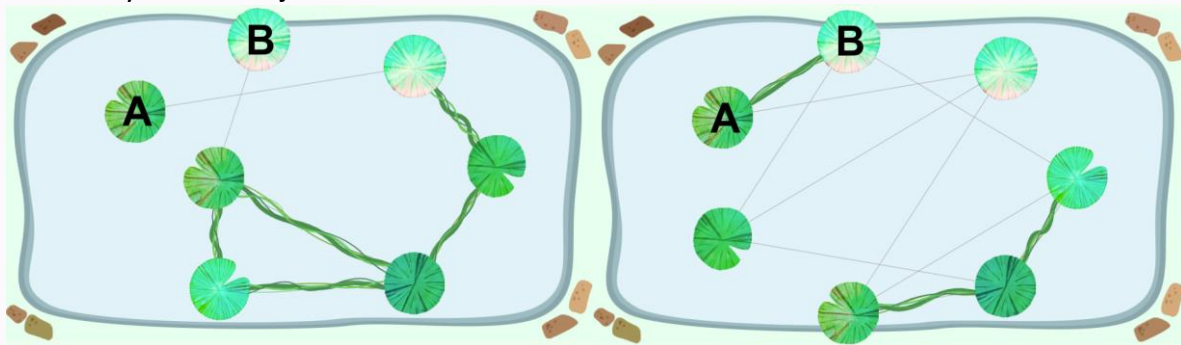
Виртуелни експонат *Срце на небу* позива децу да управљају змајем како би он пратио унапред дефинисану путању на небу. Док циљни облик представља „статичку“ путању, путања змаја оличава „динамичку“ путању. Занимљиво је да кретање змаја, упркос томе што је динамично, оставља траг на екрану, претварајући тако динамичку путању у статичку. Експонат на тај начин наглашава правац независно од облика путање. Деца не управљају директно змајем, већ га индиректно наводе помоћу облака који дува ветар и утиче на кретање змаја чија се путања делимично оцртава на небу. Таква поставка побољшава визуелно-моторну координацију и вештину просторне оријентације. Као што је наглашено код претходног експоната, правац игра кључну улогу у одређивању путање. Поред тога, уводимо и појам брзине: смер ветра указује на смер кретања змаја, а дужина његовог даха представља брзину. Заједно, правац и брзина чине вектор брзине змаја у лету, који увек тангира путању.



Локвањи

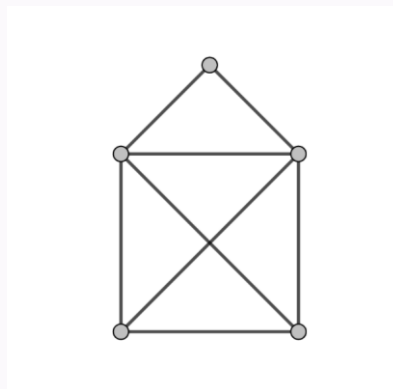
У виртуелном експонату *Локвањи* путање се формирају онда када се локвањи споје дужима које се не пресецају. Овај експонат проширује концепт путање на концепт графа: локвањи представљају чворове, а њихове везе су гране графа. Свака грана доследно повезује два чвора, чиме се обезбеђује да ниједна грана не остане неповезана као и да не постоје неповезани чворови. Чворови могу послужити и као почетне и као завршне тачке за више грана. Неке гране могу се пресецати. Гране које се преклапају приказане су танким линијама, док се оне које се не преклапају појављују као зелени струкови. Изворни циљ игре јесте распетљати све гране и

елиминисати њихово пресецање. Међутим, приказани графикон нуди прилику за даље истраживање појма путање. Изаберемо ли граф и означимо ли два локвања са *A* и *B*, можемо истраживати различите путање доступне за повезивање тих назначених тачака. Колико различитих путева постоји?



Тежина овог задатка зависи од изабраног графа и варира од једноставног до веома сложеног. Могу се увести додатни услове које путања мора да испуни да би била валидна (нпр. да се гране не секу, дозвољено је враћање потеза и слично). Такође, можете деци поставити изазов да пронађу најкраћи пут који повезује све локвање, по угледу на чувени проблем трговачког путника.

Још један занимљив задатак било би повезати што је више могуће локвања тако да се свака грана употреби само једном. Понекад није могуће повезати све локвање, као што је приказано на првој слици. Затим бисте могли поставити и нека додатна питања попут: да ли је могуће повезати све локвање, зашто да, или зашто не, који услови морају бити испуњени да би се сви повезали? Ови задаци наслањају се на чувени проблем Кенигсбершких мостова. Деца би такође могла да препознају сличност са загонетком која тражи да се из једног потеза нацрта путања на графу који подсећа на кућу:



Змијица

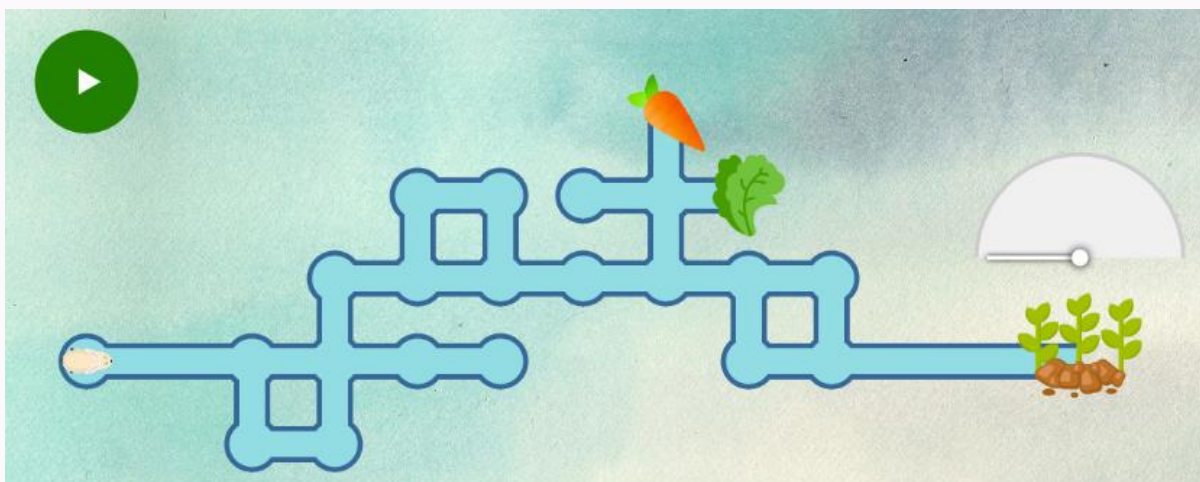
Како се игра *Змијица* развија, жетон сваког играча ће исцртати једну путању на табли. У ствари, путања која настаје као резултат игре аутоматски производи граф (погледајте претходни опис експоната *Локвањи*). Илустрација приказује примере путање за обе верзије игре.

Можете питати децу колико је дугачка путања њиховог жетона. За верзију игре с новчићем, дужина путање одређена је бројем окрета потребних за завршетак игре, док је за верзију игре с коцкицама дужина увек иста и одговара дужини змије (односно броју назначених поља на њеном телу). У случају да путања на табли није довољна за опсег до ког деца умеју да броје, могу нацртати путању одговарајуће дужине на листу папира с квадратном мрежом, користећи квадрате као јединице за бројање.



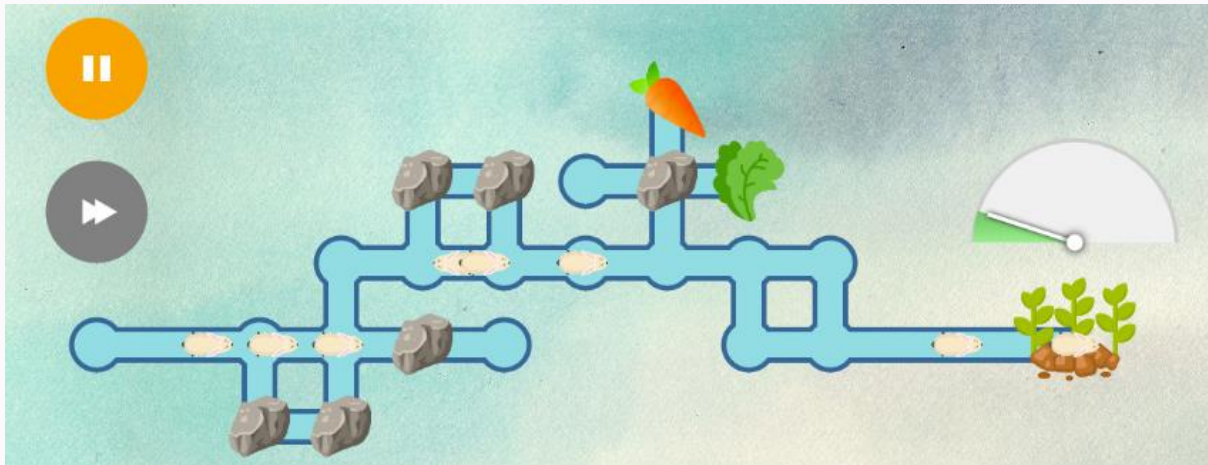
Зекин лавиринт

Дизајн експоната *Зекин лавиринт* увек формира граф који се састоји од чворова (подручја у облику кругова, укључујући ту и све пресеке стаза) и грана (везе између кружних области). Ево примера:



Зечеви се крећу по графу, при чему сваки прати своју јединствену руту. Свака путања почиње на левој страни екрана а завршава или бегом у зечју рупу на десној страни или ћорсокакком са шаргарепом или купусом негде унутар графа. Те путање се разликују по дужини и могу садржати више петљи.

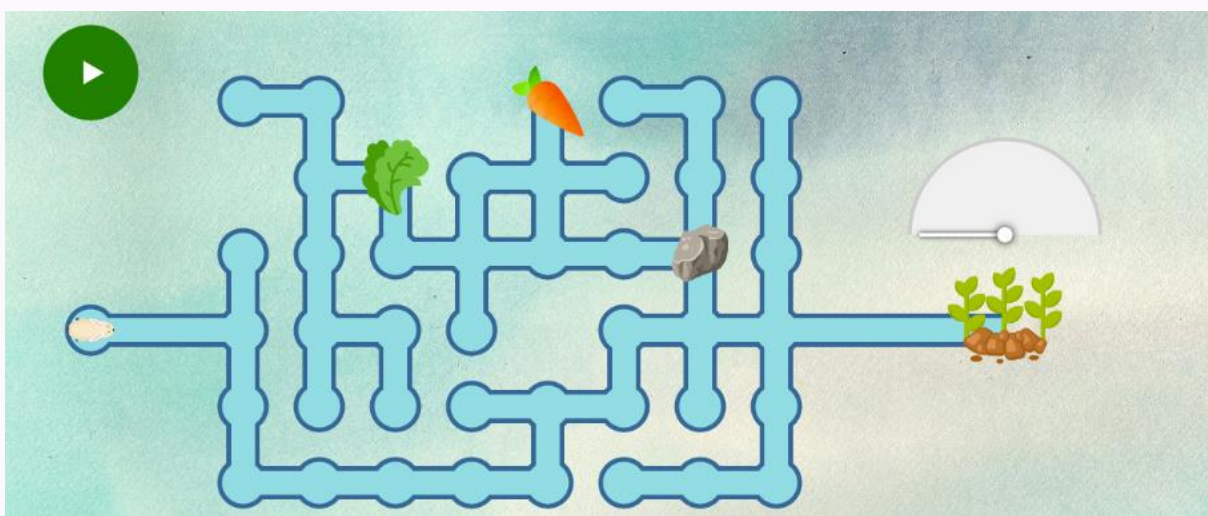
Циљ игре је модификовати граф стратешким позиционирањем стена на чворовима како би се обезбедило да што више зечева стигне до зечје рупе на крају путање.



Зечеви се могу кретати дуж грана које воде до стене, али ће бити приморани да се врате истим путем када дођу до ње. (Напомена: ово понашање се разликује од понашања математичког графа јер преосталој грани недостаје чвор на крају на ком се налази стена.) Могуће је блокирати све три опције завршетка (и зечју рупу, и шаргасрепу, и купус), што као резултат даје игру која се никада не завршава. Стене такође могу блокирати заобилазне путеве, помажући зечевима да брже стигну до свог јендека (као што се види на слици екрана: само једна стена блокира шаргарепу и купус; осталих пет није неопходно за постизање циља, али оне убрзавају зечеве на путу до куће).

Почетна питања о графу (пре него што деца почну да постављају камење дуж лавиринта) могу да личе на она која се користе код експоната *Локвањи*: колико различитих путева могу да користе зечеви, или који је пут најкраћи, итд. Проналажење најкраћег пута ће указати на места где треба поставити стене како би се постигао оригинални циљ игре.

Даље, можете постављати питања о оптималном постављању стена да би се постигао циљ игре. Такође, размислите који је то минимални број стена потребан за блокирање свих мамаца и како треба да изгледа њихово стратешко постављање на графу који је приказан у игри. На пример, конфигурација графа може бити таква да омогућава блокирање два мамца једном стеном, иако је могуће блокирати сваки од њих засебно уз помоћ две стене.



Пример радионице засноване на пројекту СМЕМ

У овом одељку показаћемо на конкретном примету како би могла изгледати једна радионица инспирисана активностима које су део пројекта СМЕМ. Те активности ће нам послужити као инспирација за стварање наставног материјала који може оставити дубок утисак на ученике, било да га користите у учионици или ван ње.

За узраст: од шест до осам година

Радионица: Геометрија и стицање осећаја за простор

Место одржавања: учионица / кућно окружење

Време потребно за појединачну активност: 20-25 минута

Активности: Нађи ме на плажи

Опипљива геометрија

Геометријске слагалице

Потребан материјал: фото-апарати, геотабле, плочице за слагање у облику геометријских фигура

Радионица обухвата: упаривање језичких фраза и израза с положајима објеката у простору;
разумевање декартовских концепата;
истраживање геометријских облика и њихових особина;
прављење Платонових тела;
истраживање углова и светла помоћу фотографија.

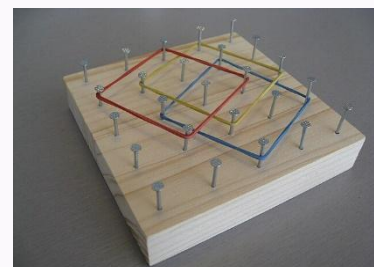
Математичке теме које се користе: геометрија (идеја простора, углови, геометријске фигуре).

Нађи ме на плажи

Прва активност у оквиру радионице помаже деци да боље разумеју простор и да унапреде свој осећај за положај кроз комбинацију визуелних учила и практичних истраживања.

Деци се дају илустрације морских призора с мноштвом различитих објеката. Задатак је да упаре језичке фразе с одговарајућим положајима објеката у приказаним сценама. На пример, фразе попут: „поред палме“, „иза чамца“ или „испред светионика“ треба упарити с одговарајућим објектима на илустрацијама. Ова вежба им помаже да разумеју речи које описују простор и положај објеката.

Да би боље разумели идеју простора, деца ће користити Геотаблу, тактилни алат који у неку руку реплицира Декартову раван. Уз помоћ гумених трака и клинова правиће разне фигуре или означаваће тачке на Геотабли. Уз помоћ овог учила деца на практичан начин савлађују основне елементе Декартовог координатног система као што су x -оса и y -оса, координате и позиционирање објеката помоћу тачака на мрежи.



Радионица се завршава забавном и интерактивном активношћу у којој деца постају фотографи. Користиће фото-апарате или камере паметних телефона за прављење фотографија из птичје или жабље перспективе и панорамских фотографија. Поред тога, истраживаће како промена тачке гледишта мења перцепцију положаја и величину објеката на снимљеним фотографијама.

Следи дискусија кроз коју деца треба да изнесу своја запажања о утицају различитих перспектива на позиционирање објеката и визуелну перцепцију.

Током активности, васпитач или наставник кроз разговор подстиче децу да објасне како су разумели склопове речи који описују положај у простору и идеју координата. Поред тога, треба да закључе и како визуелна перспектива утиче на положај објеката. Овај отворени дијалог подстиче критичко мишљење и омогућава деци да повежу запажања из стварног света с начелима геометрије и простора.

Неки примери питања

1. Упознајемо се с координатама

Хајде да означимо хоризонталне праве са A , B и C , а вертикалне праве са 1, 2 и 3 да бисмо направили мрежу. Како нам те ознаке помажу да лоцирамо тачке у мрежи?

Можете ли нацртати тачку на положају $A3$? Које бисте координате употребили да нацртате неку тачку на мрежи?

2. Уцртавамо тачке и правимо фигуре

Повежите тачке које сте означили. Какву сте фигуру добили?

Можете ли направити троугао помоћу координата $D2$, $E4$ и $F3$? Како ћете пронаћи те тачке на мрежи?

3. Спознајемо померање и транслацију фигура

Хајде да померимо квадрат две јединице (два корака) удесно и три јединице (три корака) нагоре. Које ће му бити нове координате?

Опиши кретање фигуре уз помоћ координата. Како је промена координата утицала на положај фигуре?

4. Анализирамо однос између координата

Шта се дешава ако променимо другу координату, не мењајући прву?

Можете ли објаснити како промена прве координате помера фигуру хоризонтално или како је промена друге координате помера вертикално?

5. Истражујемо особине фигура и њихове трансформације

Шта се дешава ако повежемо тачке $A1$, $A4$, $D4$ и $D1$? Можете ли описати добијену фигуру?

Ако поставимо огледало дуж праве означене с B , како ћемо у њему видети нашу фигуру?

6. Примена у свету који нас окружује

Како нам координате могу помоћи да се крећемо по граду или да пронађемо објекте на мапи?

Можете ли се сетити неке ситуације у којој би вам знање како се користе координате могло бити од користи?

Ова питања за дискусију и вођена питања имају за циљ да учврсте дечје разумевање идеја заснованих на Декартовим координатама, подстичући их при томе да критички размишљају, изразе своја запажања и повежу нове концепте с познатим ситуацијама из света који их окружује. Начин на који васпитач или наставник води дискусију може подстаћи децу да ефикасно истражују и визуелизују геометријске концепте користећи само оловку и папир.

При крају активности васпитач или наставник подстиче децу да поделе са осталима своје увиде и закључке. Деца ће објаснити како им се спознаја положаја у простору мењала и како би се то новостечено знање могло применити у ситуацијама из свакодневног живота, чиме се учвршћује разумевање новоуведених геометријских и просторних концепата.

Ова проширена активност акценат ставља на вербално описивање, уз употребу тактилних алата попут Геотабле и фотографија с циљем да код деце побољша разумевање идеје простора, да им помогне да ојачају усвојене концепте положаја и да их укључи у дискусију која повезује визуелну перцепцију с геометријским и просторним начелима.

Алтернативна активност: Усвајање Декартових идеја уз помоћ оловке и папира

Ова модификована активност се фокусира на упознавање деце с основном идејом Декартових координата уз помоћ свима доступних алата као што су папир и оловка.

Деци треба поделити листове папира и оловке. За почетак, треба да на папиру нацртају мрежу: биће то низ хоризонталних и вертикалних правих које се секу тако да формирају квадратну мрежу. Васпитач или наставник им помаже да хоризонталне праве означе словима (A , B , C , итд), а вертикалне праве бројевима (1, 2, 3, итд), и тако добију упрошћену верзију Декартове равни.

Користећи на претходно описани начин припремљену мрежу деца вежбају означавање тачака бирајући координате (рецимо $A3$, $B4$) и обележавајући их на мрежи. Затим повезују уцртане тачке како би добили геометријске фигуре као што су квадрати, правоугаоници, троуглови или неке сложеније цртеже. Подстицање да експериментишу с различитим координатама помаже им да разумеју како координате одређују положај тачака и како се помоћу њих уцртавају фигуре на мрежи.

Да би боље разумели идеју положаја, деца треба да померају фигуре у мрежи. Васпитач или наставник им може предложити да помере изабрану фигуру (нпр. квадрат) с једне позиције на другу тако што ће навести координате нове локације. Ова вежба помаже им да увиде како промена координата утиче на померање или транслацију фигуре у равни.

Док деца раде појединачно, свако са својом мрежом, васпитач или наставник покреће дискусију с циљем да заједно истраже односе између координата, померања фигура и резултујућих фигура. Питања попут: „Како промене координата утичу на положај фигуре?“ или „Можете ли описати кретање од тачке A до тачке B помоћу координата?“ подстичу критичко размишљање и помажу деци у јачању разумевања просторних концепата.

Дискусија при крају активности подстиче децу да поделе своја искуства и запажања. Са својим васпитачем или наставником разговараће о томе како им је рад с координатама и фигурама на папиру помогао да замисле просторне положаје и разумеју основне идеје Декартовог координатног система. На крају дискусије треба подстаћи ученике да размишљају о практичним применама ових идеја у свакодневним ситуацијама.

Опипљива геометрија

Следећа активност има за циљ да подигне дечје разумевање на виши ниво и да их подстакне на истраживање различитих геометријских фигура, њихових особина и њихових односа.

Деци се дају различите геометријске фигуре — кругови, квадрати, троуглови, правоугаоници, петоуглови, шестоуглови, као и геометријска тела попут коцке, сфере и пирамиде. Васпитач или

наставник започиње активност тако што подстиче децу да се играју с добијеним фигурама и телима као и да о њима разговарају.

Неки примери питања за вођење дискусије

1. Увод у геометријске облике

Хајде да заједно испитамо ове облике. Шта примећујете када упоредите квадрат и троугао? Хајде да их поредимо кроз њихове особине. Колико страница има шестоугао? Можете ли их пребројати и означити?

2. Експериментисање с фигурама и њиховим својствима

Шта ће се десити када покушате да надовежете два троугла? Можете ли тако формирати неку фигуру која није троугао? Можете ли уз помоћ троуглова направити неку фигуру која има четири стране? Како?

3. Дискусија о симетрији и уочавање правилности

Погледајте ову шару сачињену од квадрата и троуглова. Можете ли уочити елементе који се понављају? Можете ли направити неку симетричну фигуру користећи само кругове и квадрате?

4. Истраживање геометријских тела

Хајде да проучавамо тродимензионалне облике. Које разлике уочавате између коцке и лопте? Колико страна има пирамида? Можете ли их пребројати и именовати?

5. Анализа особина фигура и тела

Шта мислите, које фигуре се могу котрљати? Можете ли објаснити зашто? Шта чини фигуру „правилном“? Можете ли уочити примере правилних око нас (у учионици, кући)?

6. Уочавање геометријских фигура и тела у свету око нас

Можете ли пронаћи примере геометријских фигура у учионици или код куће? Хајде да разговарамо о њиховим особинама. Какву улогу геометријске фигуре имају у структурама које нас окружују (попут намештаја или зграда)?

7. Подстицање креативног истраживања

Направите нову фигуру комбинујући различите плочице које имате на располагању. На који начин можете комбиновати геометријске фигуре да бисте направили неку нову фигуру? Можете ли измислити ново геометријско тело? Које би особине оно имало?

Овако проширена активност има за циљ да децу, кроз игру с геометријским плочицама, подстакне на критичко размишљање и дубље разумевање геометријских фигура и њихових особина у динамичном и интерактивном образовном окружењу.

Геометријске слагалице

Последња активност позива децу на игру с геометријским обрасцима и правилностима кроз грађење структура помоћу различитих плочица или сличних градивних елемената. За почетак покрените кратку дискусију о обрасцима и правилностима, симетрији и употреби облика при прављењу конструкција.

Свако дете затим добија сет грађевинског материјала — то могу бити дрвени блокови, магнетне плочице, Лего коцке или неке сличне коцке за игру које се лако спајају. Васпитач или наставник распоређује материјале на доступне станице, водећи рачуна да су за игру на располагању различити облици — квадрати, правоугаоници, троуглови и шестоуглови.

Деца конструишу геометријске обрасце, реплицирајући и проширујући дате примере или стварајући сопствене. Васпитач или наставник подстиче их да експериментишу са симетричним дизајном, да наизменично слажу елементе и да их ређају у низове који се понављају или прогресивно расту. Успут им поставља питања којим их наводи на размишљање како би им продубио увиде. Деца се подстичу да објасне правила на основу којих су изградиле обрасце, да разговарају о симетрији, да истражују односе између фигура и да уоче низове који се понављају у њиховим креацијама.

Неки примери питања за вођење дискусије

1. Понављање задатих образаца

Можете ли поновити овај образац користећи различите елементе?

Колико пута се тај образац понавља?

Можете ли наставити образац тако да он покрије већу површину (стола, пода)? Можете ли га направити да буде дужи, шири?

2. Стварање симетричних образаца

Можете ли изградити образац који ће бити симетричан у односу на неку замишљену праву?

Како ћете поставити огледало дуж изграђеног облика да бисте се уверили да је фигура симетрична?

Можете ли сложити шару тако да њена лева страна одговара десној страни?

3. Експериментисање с низовима

Шта следи у низу који формира ваш образац?

Можете ли да креирате низ који расте тако што му сваки пут додате још један елемент?

Како можете променити низ да бисте сваки пут удвостручили број елемената који треба додати?

4. Уочавање односа између облика

Како бирате следећи елемент за шару коју градите?

Можете ли направити образац у коме је сваки елемент упола мањи од оног који му претходи?

Шта се дешава ако у свом обрасцу елементе заротирате или их преврнете као у огледалу?

5. Подстицање варијација и сложености

Можете ли да измените своју креацију тако да у њу уградите неке додатне, потпуно нове елементе?

Шта се дешава када искомбинујете различите елементе у свом обрасцу?

Како можете закомпликовати своју шару, учинити је сложенијом, запетљанијом?

6. Дискусија о особинама образаца

Шта примећујете у вези с угловима или странама елемената у свом обрасцу?

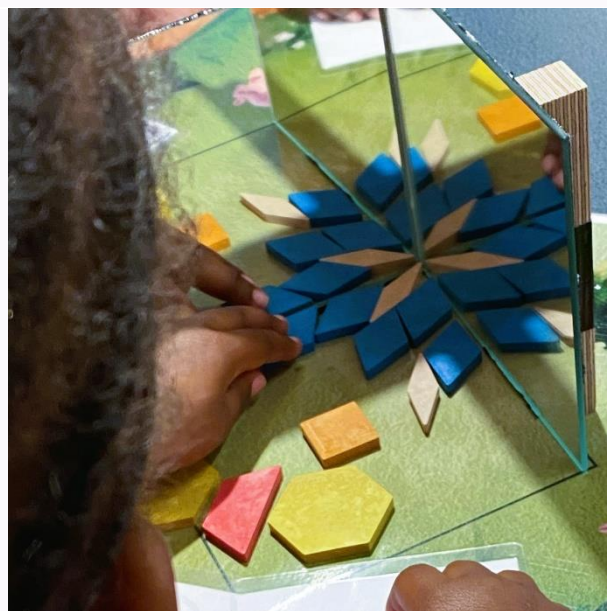
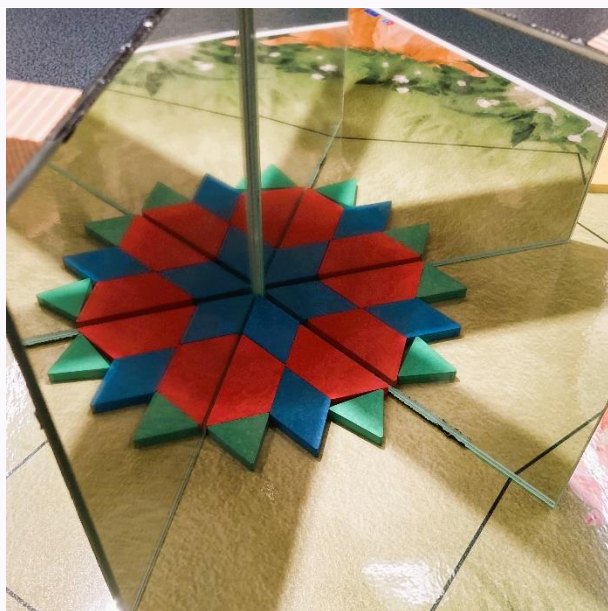
Колико страна имају градивни елементи? Да ли тај број страна утиче на вашу шару?

Можете ли објаснити симетрију или понављање које сте користили креирајући свој образац?

Предложена активност подстиче сарадничко окружење у ком деца међусобно деле своје креације, омогућавајући тако својим друговима да идентификују правила на основу којих су обрасци настали и да заједно наставе с даљом градњом. Васпитач или наставник подстиче експериментисање, постављајући деци изазов да измисле сложеније шаре и да се играју с њиховим варијацијама.

Како се активност ближи крају, почиње дискусија. Деца показују своје креације, објашњавају изграђене обрасце, дискутују о симетрији, принципу по ком се шаре понављају и геометријским особинама које су уочили. Васпитач или наставник води дискусију о математичким идејама које се крију у њиховим обрасцима.

Пред сам крај активности деца се подстичу да понесу кући оно што су створили, чиме им омогућавамо да наставе с истраживањима геометријских образаца. Васпитач или наставник износи предлоге како наставити грађење образаца код куће, чиме се гаји знатижеља и интересовање за геометријске концепте.





Sufinansira
Evropska unija

Пројекат СМЕМ кофинансира ERASMUS+, програм Европске Уније. Међутим, изнети ставови и мишљења припадају аутор(има) и не одражавају нужно ставове Европске уније или Европске извршне агенције за образовање и културу (ЕАСЕА). И Европска унија и ЕАСЕА се одричу одговорности.

[Шифра пројекта: KA220-BE-21-24-32460]

СМЕМ – Судбоносна Математика за најмлађе Математичаре © 2024 који су креирали партнери Еразмус+ пројекта KA220-BE-21-24-32460 лиценциран је под условима CC BY-SA 4.0. Да бисте видели дефиницију ове лиценце, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

IMAGINARY
open mathematics

mathematikum
Mathematik zum Anfassen.



FERMAT SCIENCE
Une autre idée des maths



mmaca

Museu
de Matemàtiques
de Catalunya